Álgebra Linear - Lista 8

1. Determine se as seguintes funções são transformações lineares.
   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, 1)$
   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, y^2)$
   (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, x - y, z)$
   (d) $T : P_2 \to P_2$, $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1 + a_2) + (a_1 + a_2)x + a_2x^2$
   (e) $T : P_2 \to P_2$, $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_1 + 2a_2x)$

2. Seja T uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 1) = (-1, 1)$. Encontre $T(1, 4)$ e $T(-2, 1)$.

3. Seja T uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 1, 1) = (2, 0, -1)$, $T(0, -1, 2) = (-3, 2, -1)$ e $T(1, 0, 1) = (1, 1, 0)$. Encontre $T(4, 2, 0)$ e $T(0, 2, -1)$.

4. Seja $M_{n,n}$ o espaço das matrizes $n \times n$. Determine se são transformações lineares.
   (a) $T : M_{n,n} \to M_{n,n}$, $T(A) = A^{-1}$
   (b) $T : M_{n,n} \to M_{n,n}$, $T(A) = AX - XA$, em que X é uma matriz fixa $n \times n$.
   (c) $T : M_{n,n} \to M_{n,n}$, $T(A) = AB$, em que B é uma matriz fixa $n \times n$.

5. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Dizemos que um vetor u é um **ponto fixo** se $T(u) = u$.
   (a) Mostre que 0 é um ponto fixo de qualquer transformação linear $T : V \to V$.
   (b) Mostre que o conjunto dos pontos fixos de uma transformação linear é um subespaço de V.

6. Mostre que a função 0 e a função identidade em um espaço vetorial V são transformações lineares.

7. Seja $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes em um espaço vetorial V e seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Mostre que $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ é um conjunto linearmente independente.

8. Seja V um espaço vetorial com produto interno. Para um vetor fixo $v_0 \in V$, defina $T : V \to \mathbb{R}$ por $T(v) = \langle v, v_0 \rangle$. Mostre que T é uma transformação linear.

9. Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de um espaço vetorial V. Mostre que se uma transformação linear $T : V \to V$ satisfaz $T(v_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, então T é a transformação nula.

10. Sejam V, W espaços vetoriais. Mostre que $T : V \to W$ é uma transformação linear se, e somente se,
$$T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$$
para todos $a, b \in \mathbb{R}$ e todos $u, v \in V$.

11. Encontre o núcleo de cada transformação linear.
    (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
    (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, 0, z)$.
    (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + 2y, y - x)$.

12. Seja T a transformação linear definida por $T(x) = Ax$. Encontre o núcleo, imagem, nulidade e o posto.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

13. Verifique se as seguintes transformações lineares definidas por $T(x) = Ax$ são injetoras e/ou sobrejetoras.

    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

14. Defina $T : M_{n,n} \to M_{n,n}$ por $T(A) = A - A^T$. Mostre que o núcleo de T é o conjunto das matrizes simétricas $n \times n$.

15. Seja B uma matriz $n \times n$ invertível. Mostre que a transformação linear $T : M_{n,n} \to M_{n,n}$ definida por $T(A) = AB$ é um isomorfismo.

16. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Mostre que T é injetora se, e somente se, o posto de T é igual a dimensão de V.

17. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Mostre que T é sobrejetora se, e somente se, o posto de T é igual a dimensão de W.

18. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear e seja U um subespaço de W. Mostre que o conjunto
$$T^{-1}(U) = \{v \in V \mid T(v) \in U\}$$
é um subespaço de V. O que é $T^{-1}(U)$ quando $U = \{0\}$.