Álgebra Linear - Lista 7

1. Encontre $\text{proj}_u v$ e $\text{proj}_v u$. Use o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$.

   (a) $u = (-3, -1)$, $v = (6, 3)$
   (b) $u = (2, -2)$, $v = (3, 1)$
   (c) $u = (1, 2, -1)$, $v = (-1, 2, -1)$
   (d) $u = (-1, 4, -2, 3)$, $v = (2, -1, 2, -1)$

2. Encontre a matriz de coordenadas de w com relação a base ortonormal B de $\mathbb{R}^n$.

   (a) $w = (4, -3)$, $B = \{(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}), (-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})\}$
   (b) $w = (2, -2, 1)$, $B = \{(\frac{\sqrt{10}}{10}, 0, \frac{3\sqrt{10}}{10}), (0, 1, 0), (-\frac{3\sqrt{10}}{10}, 0, \frac{\sqrt{10}}{10})\}$
   (c) $w = (3, -5, 11)$, $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

3. Determine se o conjunto de vetores de $\mathbb{R}^n$ é ortogonal. Caso positivo, determine se é ortonormal.

   (a) $\{(2, -4), (2, 1)\}$
   (b) $\{(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), (\frac{-4}{5}, \frac{3}{5})\}$
   (c) $\{(4, -1, 1), (-1, 0, 4), (-4, -17, -1)\}$
   (d) $\{(2, 5, -3), (4, 2, 6)\}$
   (e) $\{(-6, 3, 2, 1), (2, 0, 6, 0)\}$

4. Mostre que os conjuntos abaixo são ortogonais e ortonormalize cada um deles.

   (a) $\{(-1, 3), (12, 4)\}$
   (b) $\{(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})\}$

5. Mostre que o conjunto $\{1, x, x^2, x^3\}$ é uma base ortonormal para P_3 com produto interno definido por
$$\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

6. Aplique o processo de ortonormalização de Gran-Schmidt para dar uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$

   (a) $\{(3, 4), (1, 0)\}$
   (b) $\{(4, -3), (3, 2)\}$
   (c) $\{(2, 1, -2), (1, 2, 2), (2, -2, 1)\}$
   (d) $\{(3, 4, 0, 0), (-1, 1, 0, 0), (2, 1, 0, -1), (0, 1, 1, 0)\}$

7. Use o produto interno $\langle u, v\rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2$ em $\mathbb{R}^2$ e o processo de Gran-Schmidt para transformar $\{(-2, 1), (-2, 10)\}$ em uma base ortonormal.

8. Sejam $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ vetores em P_2 com produto interno $\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$. Determine se os conjuntos abaixo são ortonormais. Caso contrário, use o processo de Gran-Schmidt para formar um conjunto ortonormal.

   (a) $\{1, x, x^2\}$
   (b) $\{-1 + x^2, -1 + x\}$
   (c) $\{x^2, 2x+x^2, 1+2x+x^2\}$

9. Seja $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Mostre que
$$||v||^2 = |\langle v, u_1\rangle|^2 + \ldots + |\langle v, u_n\rangle|^2,$$
em que $\langle u, v\rangle$ é o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$. Essa equação é chamada de **igualdade de Parseval**.

10. Mostre que se w é um ortogonal à cada vetor em $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, então w é ortogonal à qualquer combinação linear de vetores em S.

11. Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Mostre que a interseção de W e $W^\perp$ é $\{0\}$, em que

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, v \rangle = 0, \forall w \in W\}.$$