Álgebra Linear - Lista 6

1. Encontre a norma de cada vetor.

   (a) $v = (4, 3)$

   (b) $v = (0, 1)$

   (c) $v = (5, -3, -4)$

   (d) $v = (2, 0, -5, 5)$

2. Encontre a distância entre os vetores.

   (a) $u = (1, -1)$, $v = (-1, 1)$

   (b) $u = (-1, 2, 5)$, $v = (3, 0, -1)$

   (c) $u = (1, 2, 0)$, $v = (-1, 4, 1)$

   (d) $u = (0, 1, -1, 2)$, $v = (1, 1, 2, 2)$

3. Encontre o produto interno e a norma de cada vetor.

   (a) $u = (3, 4)$, $v = (5, -12)$ com produto interno canônico.

   (b) $u = (-1, 1)$, $v = (6, 8)$ com produto interno canônico.

   (c) $u = (-4, 3)$, $v = (0, 5)$ com produto interno $\langle u, v\rangle = 3u_1v_1 + u_2v_2$

   (d) $u = (0, -6)$, $v = (-1, 1)$ com produto interno $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2$

   (e) $u = (8, 0, -8)$, $v = (8, 3, 16)$ com produto interno $\langle u, v\rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2 + u_3v_3$

4. Verifique se é produto interno ou não.

   (a) $\langle u, v\rangle = 3u_1v_1 + u_2v_2$

   (b) $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}u_1v_1 + \frac{1}{4}u_2v_2$

   (c) $\langle u, v\rangle = -u_1u_2u_3$

   (d) $\langle u, v\rangle = u_1v_1 - u_2v_2 - u_3v_3$

5. Sejam $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ em P_2. Mostre que a função $\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ define um produto interno no espaço vetorial de polinômios de grau no máximo 2.

6. Usando o produto interno definido no exercício anterior, calcule o produto interno e a distância dos polinômios abaixo.

   (a) $p(x) = 1 - x + 3x^2$, $q(x) = x - x^2$

   (b) $p(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, $q(x) = 1 + 2x^2$

7. Encontre o ângulo entre os dois vetores.

   (a) $u = (-4, 3)$, $v = (0, 5)$ e $\langle u, v\rangle = 3u_1v_1 + u_2v_2$

   (b) $u = (0, 1, -2)$, $v = (3, -2, 1)$ e $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

   (c) $p(x) = 1 - x + x^2$, $q(x) = 1 + x + x^2$ e $\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1$

8. Mostre que se u é ortogonal a v e w, então u é ortogonal a $cv + dw$ para quaisquer escalar $c, d \in R$.

9. Mostre que $||u + v|| = ||u|| + ||v||$ se, e somente se, u e v tem a mesma direção.

10. Mostre que
$$||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2.$$

11. Seja W um subespaço vetorial de um espaço vetorial V com produto interno. Mostre que o conjunto
$$W^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \forall w \in W\}$$
também é um subespaço de V.