Álgebra Linear - Lista 5

1. Escreva cada vetor como combinação linear dos vetores em $S = \{(2, -1, 3), (5, 0, 4)\}$ (se possível).

   (a) $(-1, -2, 2)$ (b) $(1, -8, 12)$ (c) $(1, 1, -1)$

2. Determine se os conjuntos abaixo geram $\mathbb{R}^3$.

   (a) $S = \{(-2, 5 - 0), (4, 6, 3)\}$
   (b) $S = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$
   (c) $S = \{(1, 0, 3), (2, 0, -1), (4, 0, 5), (2, 0, 6)\}$

3. Determine se o conjunto $S = \{1, x^2, 2 + x^2\}$ gera P_2.

4. Determine se os seguintes conjuntos são linearmente independentes ou linearmente dependentes.

   (a) $S = \{(-2, 2), (3, 5)\}$
   (b) $S = \{(6, 2, 1), (-1, 3, 2)\}$
   (c) $S = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)\}$
   (d) $S = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$
   (e) $S = \{(1, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, -6), (1, 5, -3)\}$
   (f) $S = \{(3, -6), (-1, 2)\}$

5. Seja $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ um conjunto de vetores em um espaço vetorial V. Mostre que span(S) é um subespaço vetorial de V. Além disso, mostre que span(S) é o menor subespaço de V que contém S, no sentido de que qualquer outro subespaço vetorial de V que contém S deve conter span(S).

6. Mostre um subconjunto não vazio de um conjunto finito de vetores linearmente independentes é linearmente independente.

7. Seja S_1 é um subconjunto não vazio de um conjunto finito S_2 em um espaço vetorial V. Mostre que se S_1 é linearmente dependente, então S_2 também é linearmente dependente.

8. Mostre que qualquer conjunto de vetores contendo o zero é linearmente dependente.

9. Seja $\{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes. Mostre que se $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ é um conjunto linearmente dependente, então v é combinação linear dos u_i's.

10. Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes de um espaço vetorial V. Mostre que $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ não pode gerar V.

11. Seja $\{u, v\}$ um conjunto linearmente independente em um espaço vetorial V. Mostre que $\{u + v, u - v\}$ é linearmente independente.

12. Seja A uma matriz não singular de ordem 3. Mostre que se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes em $M_{3,1}$, então o conjunto $\{Av_1, Av_2, Av_3\}$ também é linearmente independente.

13. Mostre que dois vetores u e v são linearmente dependentes se, e somente se, um é múltiplo escalar do outro.

14. Determine se os conjuntos abaixo são uma base para $\mathbb{R}^2$ (Justifique!).

    (a) $S = \{(-3, 2)\}$
    (b) $S = \{(1, 2), (1, 0), (0, 1)\}$
    (c) $S = \{(1, 1), (-1, 1)\}$

15. Determine se os conjuntos abaixo são uma base para $\mathbb{R}^3$ (Justifique!).

    (a) $S = \{(2, 1, -2), (-2, -1, 2), (4, 2, -4)\}$
    (b) $S = \{(1, 1, 2), (0, 2, 1)\}$
    (c) $S = \{(4, 3, 2), (0, 3, 2), (0, 0, 2)\}$
    (d) $S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

16. Encontre a dimensão dos seguintes espaços vetoriais.

    (a) $\mathbb{R}^6$
    (b) P_7
    (c) $\mathbb{R}$
    (d) $M_{2,3}$

17. Encontre uma base para o espaço vetorial de todas as matrizes 3×3 diagonais. Qual a dimensão desse espaço?

18. Encontre uma base para o espaço vetorial de todas as matrizes 3×3 simétricas. Qual a dimensão desse espaço?

19. Mostre que se $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base para um espaço vetorial V e se c é um escalar não nulo, então $S_1 = \{cv_1, \ldots, cv_n\}$ também é uma base para V.

20. Seja S um conjunto linearmente independente de vetores de um espaço vetorial V, Mostre que existe uma base de V contendo S.

21. Seja S um conjunto gerador para um espaço vetorial V. Mostre que existe um subconjunto S' de S que é uma base de V.

22. Determine o posto das matrizes abaixo.

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
    (b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
    (c) $\begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -6 & -4 \\ -2 & -4 & 4 & 9 \end{bmatrix}$
    (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
    (e) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

23. Encontre o núcleo das matrizes abaixo.

    (a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$
    (b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & 4 & -8 \end{bmatrix}$

24. Mostre que se A não é uma matriz quadrada, então ou os vetores linhas ou os vetores colunas de A formam um conjunto linearmente dependente.

25. Mostre que os vetores linha não nulos de uma matriz na forma escalonada são linearmente independentes.

26. Seja A uma matriz $m \times n$. Mostre que $N(A) \subseteq N(A^T A)$

27. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n satisfazendo $Ax = Bx$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

    (a) Encontre o posto e o núcleo de $A - B$.

    (b) Mostre que A e B devem ser iguais.

28. Dada a matriz de coordenadas de x na base B de $\mathbb{R}^n$, encontre as coordenadas de x na base canônica.

    (a) $B = \{(2,-1),(0,1)\}$, $[x]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

    (b) $B = \{(-2,3),(3,-2)\}$, $[x]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

    (c) $B = \{(0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1)\}$, $[x]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

    (d) $B = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$, $[x]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

29. Encontre a matriz de coordenadas de $x \in \mathbb{R}^n$ na base B.

    (a) $B = \{(4,0),(0,3)\}$, $x = (12,6)$

    (b) $B = \{(8,11,0),(7,0,10),(1,4,6)\}$, $x = (3,19,2)$

30. Encontre a matriz de transição da base B para a base B'.

    (a) $B = \{(1,0),(0,1)\}$, $B' = \{(2,4),(1,3)\}$

    (b) $B = \{(2,4),(-1,3)\}$, $B' = \{(1,0),(0,1)\}$

    (c) $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $B' = \{(1,3,-1),(2,7,-4),(2,9,-7)\}$

    (d) $B = \{(1,3,2),(2,-1,2),(5,6,1)\}$, $B' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$