Álgebra Linear - Lista 4

1. Verifique se os seguintes conjuntos com operações usuais são espaços vetoriais.

   (a) $\mathbb{R}^2$

   (b) $\mathbb{R}^n$

   (c) $\mathbb{Z}$

   (d) P_2 o conjunto dos polinômios de grau igual 2.

   (e) O conjunto $\{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

   (f) O conjunto $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$

   (g) O conjunto $\{(x, \frac{1}{2}x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

   (h) O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

   (i) O conjunto de todas as matrizes 2×2 singulares.

   (j) O conjunto de todas as matrizes 2×2 não-singulares.

   (k) O conjunto de todas as matrizes diagonais 2×2.

   (l) $C[0, 1]$ o conjunto de todas as funções contínuas definidas no intervalo $[0, 1]$.

2. Seja V o conjunto de todos os números reais positivos. Determine se V é um espaço vetorial com as seguintes operações.

$$x + y = xy$$

   e

$$cx = x^n.$$

3. Determine se $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial com as seguintes operações.

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$$

   e

$$c(x_1, y_1) = (cx_1, cx_2).$$

4. Mostre que em um espaço vetorial V, o vetor nulo e o inverso aditivo são únicos.

5. Seja V um espaço vetorial e sejam $u, v, w \in V$. Mostre que se $u + w = v + w$, então $u = v$.

6. Seja V um espaço vetorial. Mostre que

   (a) $0v = 0$

   (b) $c0 = 0$

   (c) $cv = 0 \Rightarrow c = 0$ ou $v = 0$

   (d) $(-1)v = -v$

7. Mostre que $W = \{(x_1, 0, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

8. Mostre que $W = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

9. Verifique se W é subespaço vetorial de V.

   (a) $W = \{(x_1, x_2, x_3, 0) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

   (b) $W = \{(x, y, 4x - 5y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

   (c) $W = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

(d) W é o conjunto de matrizes $n \times n$ com determinante igual a 1 e V é o conjunto das matrizes $n \times n$.

(e) Seja $B \in M_{n,n}$. $W = \{A \in M_{n,n} \mid AB = BA\}$ e $V = M_{n,n}$

10. Mostre que um subconjunto não-vazio W é um subespaço vetorial de V se, e somente se, $ax + by$ é um elemento de W para todos escalares a, b e todos vetores x, y em W.

11. Seja A uma matriz $m \times n$. Mostre que $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

12. Seja W um subespaço vetorial de V. Mostre que o vetor nulo de V também é o vetor nulo de W.

13. Sejam V e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial U. Mostre que o conjunto

$$V + W = \{v + w \mid v \in V, w \in W\}$$

é um subespaço vetorial de U.

14. Sejam V e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial U. Mostre que a interseção $V \cap W$ é um subespaço vetorial de U.