Álgebra Linear - Lista 3

1. Determine se cada uma das matrizes abaixo é uma matriz elementar.

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Encontre o inverso de cada matriz elementar.

   (a) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Encontre uma sequência de matrizes elementares cujo produto é a matriz não singular:

   (a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

4. Dizemos que uma matriz quadrada A é **idempotente** se $A^2 = A$. Mostre que A é idempotente se, e somente se, A^T é idempotente.

5. Mostre que se A é uma matriz $n \times n$ idempotente e invertível, então $A = I_n$.

6. Mostre que se A e B são matrizes idempotentes e $AB = BA$, então AB é idempotente.

7. Mostre que se A é linha-equivalente à B e B é linha-equivalente à C, então A é linha-equivalente à C.

8. Mostre que se A é linha-equivalente à B, então B é linha-equivalente à A.

9. Seja A uma matriz não-singular. Mostre que se B é linha-equivalente à A, então B é não-singular.

10. Calcule o determinante das matrizes abaixo.

    (a) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

    (b) $\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

    (c) $\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 4 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$

    (d) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

    (e) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

    (f) $\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & -13 & -12 \\ -6 & 2 & 5 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

11. Encontre o valor de x nas equações abaixo

    (a) $\begin{vmatrix} x-6 & 3 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

    (b) $\begin{vmatrix} x+3 & 1 \\ -4 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

12. Mostre que se B é obtido de uma matriz A adicionando um múltiplo de uma linha em outra linha de A, então $\det(B) = \det(A)$.

13. Mostre que se B é obtido de A multiplicando uma linha A por uma constante diferente de zero c, então $\det(B) = c \cdot \det(A)$

14. Encontre o(s) valor(es) de k para que a matriz A seja singular.

    (a) $A = \begin{bmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k+2 \end{bmatrix}$

    (b) $A = \begin{bmatrix} k & -3 & -k \\ -2 & k & 1 \\ k & 1 & 0 \end{bmatrix}$

15. Sejam A e B matrizes $n \times n$ tais que $AB = I_n$. Mostre que $|A| \neq 0$ e $|B| \neq 0$.

16. Sejam A e B matrizes $n \times n$ tais que AB é singular. Mostre que ou A é singular ou B é singular.

17. Seja A uma matriz $n \times n$ tal que a soma de cada linha é igual a zero. Encontre $|A|$.

18. Seja A uma matriz invertível. Se as entradas de A e A^{-1} são números inteiros, então $\det(A) = \pm 1$.

19. Mostre que se A é uma matriz quadrada, então $\det(A) = \det(A^T)$.

20. Seja A uma matriz $n \times n$ antissimétrica ($A^T = -A$). Mostre que $|A| = (-1)^n |A|$.

21. Seja A é uma matriz $n \times n$ antissimétrica. Mostre que se n é ímpar, então $|A| = 0$

22. Seja A uma matriz quadrada invertível. Dizemos que A é **ortogonal** se $A^T = A^{-1}$. Mostre que a matriz identidade $n \times n$ é ortogonal.

23. Mostre que se A é uma matriz ortogonal, então $|A| = \pm 1$.