Álgebra Linear - Lista 2

1. Encontre os valores de x e y.

   (a) $\begin{bmatrix} 16 & 4 & 5 & 4 \\ -3 & 13 & 15 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 2x+1 & 4 \\ -3 & 13 & 15 & 3x \\ 0 & 2 & 3y-5 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} x+2 & 8 & -3 \\ 1 & 2y & 2x \\ 7 & -2 & y+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+6 & 8 & -3 \\ 1 & 18 & -8 \\ 7 & -2 & 11 \end{bmatrix}$

2. Resolva a equação matricial para x, y, z e w.

   (a) $4\begin{bmatrix} x & y \\ z & -1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} y & z \\ -x & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 & x \\ 5 & -x \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} w & x \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} y & w \\ z & x \end{bmatrix}$

3. Para cada matriz A e B abaixo, encontre AB e BA, quando possível.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

   (e) $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

4. Escreva cada sistema linear na forma matricial $Ax = b$ e resolva esta equação.

   (a) $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 4 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 17 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 17 \\ x_1 + 3x_2 = -11 \\ -6x_2 + 5x_3 = 40 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 5 \end{cases}$

5. Mostre que se A e B são matrizes diagonais do mesmo tamanho, então $AB = BA$.

6. Definimos o **traço** de uma matriz A $n \times n$ pela soma das entradas da diagonal principal de A, isto é,
$$Tr(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}.$$
Calcule o traço das seguintes matrizes.

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

7. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n e seja c um escalar. Mostre que
   (a) $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$
   (b) $Tr(cA) = cTr(A)$
   (c) $Tr(AB) = Tr(BA)$

8. Mostre que se o produto AB é uma matriz quadrada, então o produto BA está definido.

9. Mostre que se os produtos AB e BA estão definidos, então AB e BA são matrizes quadradas.

10. Calcule o valor de cada expressão matricial
   (a) $\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & -7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
   (b) $-3\left(\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$

11. Considere as matrizes
$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$
Resolva para X cada equação abaixo.
   (a) $X = 3A - 2B$
   (b) $2X + 3A = B$
   (c) $2X = 2A - B$
   (d) $2A + 4B = -2X$

12. Considere as matrizes
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$
e seja $c = -2$. Realize cada operação abaixo.
   (a) $c(BA)$
   (b) $c(CB)$
   (c) $B(C + O)$
   (d) $cB(C + C)$

13. Encontre a transposta das seguintes matrizes.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 6 & -7 & 19 \\ -7 & 0 & 23 \\ 19 & 23 & -32 \end{bmatrix}$

14. Para cada uma das matrizes abaixo, faça $A^T A$ e AA^T

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

15. Mostre que 1 é a identidade para a multiplicação por escalar, isto é, $1A = A$.

16. Mostre que $(c + d)A = cA + dA$.

17. Seja A uma matriz $m \times n$ e seja c um escalar. Mostre que

    (a) $A + O_{mn} = A$
    (b) $A + (-A) = O_{mn}$
    (c) Se $cA = 0$, então $c = 0$ ou $A = O_{mn}$

18. Dizemos que uma matriz A é **antissimétrica** se $A^T = -A$. Determine se as matrizes abaixo são antissimétricas.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

19. Mostre que as entradas da diagonal principal de uma matriz antissimétrica são iguais a zero.

20. Encontre o inverso de cada matriz (se existir)

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ -1 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

21. Use a matriz inversa para resolver os sistemas abaixo.

(a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

22. Mostre que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

23. Mostre que se C é uma matriz invertível tal que $CA = CB$, então $A = B$.

24. Mostre que se $A^2 = A$, então $I - 2A = (I - 2A)^{-1}$

25. Mostre que a inversa de uma matriz simétrica não-singular é simétrica.

26. Mostre que se A, B e C são matrizes quadradas tais que $ABC = I$, então B é invertível e $B^{-1} = CA$.

27. Mostre que se $A^2 = A$, então ou A é singular ou $A = I$.