Álgebra Linear - Lista 10

1. Verifique se λ_i é um autovalor de A e que x_i é um autovetor de λ_i

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $\begin{array}{l} \lambda_1 = 2,\ x_1 = (1,0) \\ \lambda_2 = -2,\ x_2 = (0,1) \end{array}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $\begin{array}{l} \lambda_1 = -1,\ x_1 = (1,1) \\ \lambda_2 = 2,\ x_2 = (5,2) \end{array}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{array}{l} \lambda_1 = 2,\ x_1 = (1,0,0) \\ \lambda_2 = -1,\ x_2 = (1,-1,0) \\ \lambda_3 = 3,\ x_3 = (5,1,2) \end{array}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{array}{l} \lambda_1 = 5,\ x_1 = (1,2,-1) \\ \lambda_2 = -3,\ x_2 = (-2,1,0) \\ \lambda_3 = -3,\ x_3 = (3,0,1) \end{array}$

2. Determine se x_i é um autovetor de A.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{array}{l} x_1 = (1,2) \\ x_2 = (2,1) \\ x_3 = (1,-2) \\ x_4 = (-1,0) \end{array}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{array}{l} x_1 = (2,-4,6) \\ x_2 = (2,0,6) \\ x_3 = (2,2,0) \\ x_4 = (-1,0,1) \end{array}$

3. Encontre os autovalores e autovetores de A.

   (a) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

   (e) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

   (f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

4. Mostre que $\lambda = 0$ é um autovalor de A se, e somente se, A é singular.

5. Mostre que A e A^T têm os mesmos autovalores.

6. Verifique que A é diagonalizável encontrando $P^{-1}AP$ e use este resultado para encontrar os autovalores de A.

   (a) $A = \begin{bmatrix} -11 & 36 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. Encontre (se possível) uma matriz não singular P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

8. Mostre que as seguintes matrizes não são diagonalizáveis.

   (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

9. Seja A uma matriz diagonalizável $n \times n$ e seja P uma matriz invertível tal que $B = P^{-1}AP$ é a forma diagonal de A. Mostre que $A^k = PB^kP^{-1}$, em que k é um inteiro positivo.

10. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n autovalores distintos de uma matriz A $n \times n$. Use o exercício anterior para encontrar os autovalores de A^k.

11. Verifique se as seguintes matrizes são ortogonais.

    (a) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

    (b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

    (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

    (d) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

12. Verifique que quaisquer dois autovetores correspondentes à autovalores distintos das matrizes simétricas abaixo são ortogonais.

    (a) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

    (b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

13. Encontre uma matriz P tal que P^TAP diagonaliza ortogonalmente A.

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

14. Mostre que se A e B são matrizes $n \times n$ ortogonais, então AB e BA também são ortogonais.