Álgebra Linear - Gabarito Teste 2

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x, 0, z)$.

   (a) Encontre o núcleo e a nulidade de T.

   (b) Encontre a imagem e o posto de T.

   Solução:

   (a) Por definição, se $T : V \to W$ é uma transformação linear, então $\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$. Assim,

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,0,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ e } z = 0\} \\ &= \{(0,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

   Agora, a nulidade de T é, por definição, a dimensão de $\ker(T)$. Neste caso, como $\ker(T) = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\}$, temos que a nulidade é igual a 1.

   (b) Temos que a imagem de uma transformação linear $T : V \to W$ é o conjunto $\mathrm{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{T(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x,0,z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

   Agora, o posto de T é, por definição, a dimensão de $\mathrm{Im}(T)$. Neste caso, como $\mathrm{Im}(T) = \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$, temos que o posto de T é igual a 2.

   Outra maneira de ver que o posto de T é igual a 2 é usar o seguinte teorema:

   Teorema. *Se $T : V \to W$ é uma transformação linear, então*

$$\dim V = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

   Como já vimos que $\dim(\ker(T)) = 1$, pelo teorema, segue que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

2. Determine se cada afirmação abaixo é **Verdadeira** ou **Falsa**. Justifique sua resposta. Respostas sem a devida justificativa serão desconsideradas!

   (a) Se v um vetor não nulo em $\mathbb{R}^n$, então $\frac{v}{||v||}$ é um vetor unitário.

   (b) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é um conjunto ortogonal de $\mathbb{R}^3$ mas não é ortonormal.

   (c) Se um vetor v é ortogonal à u e w, então v é ortogonal à $c_1u + c_2w$ para quaisquer $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(d) Se u e v são vetores diferentes em $\mathbb{R}^2$, então $\langle u, v\rangle > 0$.

(e) Se V é um espaço vetorial, então a função identidade $T : V \to V$ definida por $T(v) = v$ é uma transformação linear.

Solução:

(a) Dizemos que um vetor $v \in V$ é *unitário*, se $||v|| = 1$. Logo, vamos calcular a norma de $\frac{V}{||v||}$.

$$\begin{aligned} ||\tfrac{v}{||v||}|| &= \sqrt{\langle \tfrac{v}{||v||}, \tfrac{v}{||v||}\rangle} \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{||v||} \cdot \tfrac{1}{||v||}\langle v, v\rangle} \\ &= \sqrt{(\tfrac{1}{||v||})^2\langle v, v\rangle} \\ &= \tfrac{1}{||v||}\sqrt{\langle v, v\rangle} \\ &= \tfrac{1}{||v||} \cdot ||v|| \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto $\frac{v}{||v||}$ é um vetor unitário e a afirmação é verdadeira.

(b) Precisamos verificar se $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ é ortonormal, isto é, se S é ortogonal e a norma de cada vetor em S é igual a 1. Primeiro, vejamos se S é ortogonal:

- $\langle (1,0,0), (0,1,0)\rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0.$
- $\langle (1,0,0), (0,0,1)\rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0.$
- $\langle (0,1,0), (0,0,1)\rangle = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$

Segue que, S é ortogonal. Vejamos se S é ortonormal:

- $||(1,0,0)|| = \sqrt{\langle (1,0,0), (1,0,0)\rangle} = \sqrt{1^2} = 1.$
- $||(0,1,0)|| = \sqrt{\langle (0,1,0), (0,1,0)\rangle} = \sqrt{1^2} = 1.$
- $||(0,0,1)|| = \sqrt{\langle (0,0,1), (0,0,1)\rangle} = \sqrt{1^2} = 1.$

Portanto S é ortonormal e a afirmação é falsa.

(c) Seja v um vetor ortogonal à u e w e sejam $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Precisamos ver que v é ortogonal à $c_1u + c_2w$, isto é, $\langle v, c_1u + c_2w\rangle = 0$. Para isso, note que

$$\begin{aligned} \langle v, c_1u + c_2w\rangle &= \langle v, c_1u\rangle + \langle v, c_2w\rangle \\ &= c_1\langle v, u\rangle + c_2\langle v, w\rangle \\ &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto a afirmação é verdadeira.

(d) A afirmação é falsa pois tomando $u = (1,1)$ e $v = (1,-2)$, note que

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= \langle (1,1),(1,-2)\rangle \\ &= 1-2 \\ &= -1 \\ &< 0. \end{aligned}$$

(e) Precisamos verificar se $T(u+v) = T(u)+T(v)$ e se $T(\alpha v) = \alpha T(v)$. Para isso, note que

- $$\begin{aligned} T(u+v) &= u+v \\ &= T(u)+T(v). \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} T(\alpha v) &= \alpha v \\ &= \alpha T(v). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.