Gabarito: Teste 1

1. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

Escreva o sistema na forma matricial $Ax = b$, resolva-o encontrando a inversa da matriz A e assinale sua resposta.

(a) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = -1$

(b) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$

(c) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ e $x_3 = -2$

(d) $x_1 = 3$, $x_2 = -7$ e $x_3 = 0$

(e) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ e $x_3 = -3$

Solução: O sistema na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Vamos calcular o inverso da matriz A usando o escalonamento da matriz aumentada $[AI_3]$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto o inverso da matriz A é $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ e a solução do sistema é

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Encontre o valor da expressão matricial e assinale a resposta correta.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 7 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(a) $\begin{bmatrix} 32 & -20 & 17 \\ 12 & -7 & 10 \\ -12 & -3 & 16 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 21 & -7 & 10 \\ 12 & 7 & 14 \\ 9 & 14 & -4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 5 & 12 & -11 \\ -10 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -3 & 32 & 1 \\ 24 & 11 & 5 \\ -15 & -2 & 19 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 11 & 21 & -2 \\ 2 & -8 & 9 \\ -10 & 36 & 0 \end{bmatrix}$

Solução:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 7 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 34 & -30 & 16 \\ 10 & -8 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 9 & 3 & -12 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 35 & -26 & 14 \\ 12 & -7 & 7 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 9 & 3 & -12 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 32 & -20 & 17 \\ 12 & -7 & 10 \\ -12 & -3 & 16 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

3. Sejam A, B e C matrizes quadradas. Mostre que se $ABC = I$, então B é invertível e $B^{-1} = CA$.

   Solução: Por hipótese, temos $ABC = I$. Pela propriedade associativa do produto de matrizes, podemos escrever $A(BC) = I$. Logo, A é invertível, isto é, existe A^{-1} tal que $A^{-1}A = I$. Multiplicando por A à direita na equação da hipótese, obtemos $ABCA = A$. Agora multiplicando à esquerda por A^{-1}, temos $A^{-1}ABCA = A^{-1}A$. Portanto $BCA = I$ e, novamente pela propriedade associativa, $B(CA) = I$. Ou seja B é invertível e o seu inverso é CA.