Gabarito - Prova 2

1. Encontre a matriz canônica de $T = T_2 \circ T_1$ para

   $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_1(x, y) = (x - 2y, 2x + 3y)$

   $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_2(x, y) = (y, 0)$.

   Solução: Temos duas maneiras para fazer a questão.

   (a) Primeiro, podemos calcular a composta e depois calcular a matriz canônica. Observe que

   $$\begin{aligned} T(x,y) &= T_2 \circ T_1(x,y) \\ &= T_2(T_1(x,y)) \\ &= T_2(x-2y, 2x+3y) \\ &= (2x+3y, 0). \end{aligned}$$

   Agora para obter a matriz canônica de T, fazemos

   $$T(1,0) = (2,0) \text{ e } T(0,1) = (3,0).$$

   Logo a matriz canônica é

   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (b) Um outro modo de resolver a questão é calcular a matriz canônica de T_1 e T_2 e depois fazer a multiplicação.

   Para obter a matriz de T_1 fazemos

   $$T_1(1,0) = (1,2) \text{ e } T_1(0,1) = (-2,3).$$

   Logo, a matriz canônica de T_1 é $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

   Vamos calcular a matriz de T_2:

   $$T_2(1,0) = (0,0) \text{ e } T_2(0,1) = (1,0).$$

   Assim, a matriz de T_2 é $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   Portanto, a matriz canônica de T é

   $$A = A_2 A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Encontre os autovalores e autovetores de $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e diga se A é diagonalizável ou não (**justifique!**).

Solução: Para calcular os autovalores de A, vamos encontrar as raízes do polinômio característico $\det(\lambda I - A)$. Note que

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-2) - 2(\lambda-2) \\ &= (\lambda-2)^2(\lambda-3) - 2(\lambda-2) \\ &= (\lambda-2)((\lambda-2)(\lambda-3) - 2) \\ &= (\lambda-2)(\lambda^2 - 5\lambda + 6 - 2) \\ &= (\lambda-2)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) \\ &= (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-4). \end{aligned}$$

Portanto os autovalores são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 4$. Daqui já podemos afirmar que a matriz A é diagonalizável pois todos os autovalores são distintos.

Agora, vamos calcular os autoespaços de cada autovalor.

- [$\lambda_1 = 1$] Queremos resolver o sistema $(\lambda_1 I - A)x = 0$. Para isso, vamos escalonar a matriz $\lambda_1 I - A$.

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, temos

$$\begin{cases} -1x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Portanto $x_3 = x_2$ e $x_1 = -x_2$ e o autoespaço associado à λ_1 é

$$S_1 = \{(-t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

e um autovetor é $v_1 = (-1, 1, 1)$.

- [$\lambda_2 = 2$] Escalonando $(\lambda_2 I - A)$ obtemos

$$\lambda_2 I - A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Portanto $x_3 = 0 = x_2$ e o autoespaço associado à λ_2 é

$$S_2 = \{(t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

e um autovetor é $v_2 = (1, 0, 0)$.

- $[\lambda_3 = 4]$ Da mesma forma, vamos escalonar $(\lambda_3 I - A)$.

$$\lambda_3 I - A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Assim, $x_2 = -2x_3$ e $x_1 = \frac{-7}{2}$. Portanto o autoespaço associado à λ_3 é

$$S_3 = \{(\frac{7t}{2}, -2t, 1t) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

e um autovetor é $v_3 = (\frac{7}{2}, -2, 1)$.

3. i) O que significa uma matriz ser ortogonalmente diagonalizável?

ii) Determine se as seguintes matrizes são ortogonalmente diagonalizáveis (você deve **justificar** sua resposta demonstrando ou citando resultados vistos em sala de aula!).

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Solução: Uma matriz A ser ortogonalmente diagonalizável significa que existe uma matriz P ortogonal tal que $P^T AP = P^{-1}AP = D$ é diagonal.

Agora, queremos usar o teorema que caracteriza matrizes ortogonalmente diagonalizáveis, isto é, uma matriz é ortogonalmente diagonalizável se, e somente se, A é simétrica. Assim, pelo teorema, apenas as letras (a) e (b) são ortogonalmente diagonalizáveis.

4. (2 pontos) Anulada

5. (4 pontos) Responda se os itens abaixo são verdadeiros ou falso (justificando adequadamente sua resposta). Todas as matrizes são quadradas.

   (a) Se A e B são matrizes $n \times n$ ortogonais, então AB também é ortogonal.

   (b) Se A é 3×3 e tem apenas 4 como autovalor, então A não é diagonalizável.

   (c) A e A^T têm os mesmos autovalores.

   (d) Mostre que se A e B são matrizes similares, então A^T e B^T também são similares.

Solução:

(a) (Verdadeiro) Precisamos mostrar que $(AB)^T = (AB)^{-1}$. Por hipótese, A e B são ortogonais, isto é, $A^T = A^{-1}$ e $B^T = B^{-1}$.

Observe que

$$\begin{aligned} (AB)^T &= B^T A^T \\ &= B^{-1}A^{-1} \\ &= (AB)^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto AB é ortogonal.

(b) (Falso) Basta tomar $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $P = I$ a matriz identidade. Neste caso $P^{-1}AP = A$ é uma matriz diagonal que tem um único autovalor igual a 4.

(c) (Verdadeiro) Vamos mostrar que o polinômio característico de A é igual ao polinômio característico de A^T pois neste caso eles terão as mesmas raízes e, consequentemente, os mesmos autovalores. Para isso, observe que

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det((A - \lambda I)^T) \\ &= \det(A^T - (\lambda I)^T) \\ &= \det(A^T - \lambda I) \\ &= P_{A^T}(\lambda). \end{aligned}$$

Portanto A e A^T têm os mesmos autovalores.

(d) (Verdadeiro) Por hipótese, A e B são similares, isto é, existe uma matriz P não singular tal que $A = P^{-1}BP$. Assim, observe que

$$\begin{aligned} A^T &= (P^{-1}BP)^T \\ &= P^T B^T (P^{-1})T \\ &= P^T B^T (P^T)^{-1}. \end{aligned}$$

Tome $L = (P^T)^{-1}$ e então

$$A^T = P^T B^T (P^T)^{-1} = L^{-1} B^T L.$$

Ou seja, A^T e B^T são similares.