Gabarito: Prova 1

1. Encontre a matriz mudança de base de

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

para a base

$$B' = \{(1,3,-1),(2,7,-4),(2,9,-7)\}.$$

Solução: Para encontrar a matriz de mudança de base de B para B', vamos escalonar a matriz $[B'\ B]$. Obtemos então uma matriz $[I_3\ P]$ em que P é a matriz de mudança de base.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 11 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -13 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto a matriz de mudança de base de B para B' é $\begin{bmatrix} -13 & 6 & 4 \\ 12 & -5 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Considere o sistema de equações em x e y

$$\begin{cases} ax + 3y = 7 \\ bx + 2y = 1. \end{cases}$$

Sobre quais condições o sistema terá exatamente uma única solução?

Solução: Escrevendo o sistema na forma matricial $Ax = b$ obtemos

$$\begin{bmatrix} a & 3 \\ b & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o sistema terá uma única solução quando $\det(A) \neq 0$. Portanto, a condição que queremos é $2a - 3b \neq 0$.

3. (a) Mostre que o conjunto das matrizes diagonais 2×2

$$D_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

é um subespaço vetorial de $M_{2,2}$.

Solução: Observe que D_2 é não vazio pois $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in D_2$. Agora precisamos mostrar que $A + B \in D_2$ para quaisquer $A, B \in D_2$ e que $c \cdot A$ para qualquer $A \in D_2$ e para qualquer $c \in \mathbb{R}$.

i. Sejam $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$ em D_2, note que

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{bmatrix}$$

que é uma matriz diagonal 2×2.

ii. Agora seja $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \in D_2$ e seja $c \in \mathbb{R}$. Observe que

$$c \cdot A = \begin{bmatrix} ca_1 & 0 \\ 0 & ca_2 \end{bmatrix}$$

que também é uma matriz diagonal 2×2.

Portanto D_2 é subespaço vetorial de $M_{2,2}$.

(b) Mostre que o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ com operações usuais não é um espaço vetorial.

Solução: Precisamos mostrar que algum dos axiomas da definição de espaço vetorial falha para os números inteiros. Neste caso, vejamos que $c \cdot v \notin \mathbb{Z}$. Tome $c = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$ e $v = 2 \in \mathbb{Z}$. Note que

$$c \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}.$$

Portanto $\mathbb{Z}$ não é espaço vetorial.

4. Seja A uma matriz não-singular (ou seja, tem inversa). Mostre que se uma matriz B é equivalente por linhas à A, então B é não-singular.

Solução: Seja A uma matriz não-singular e seja B equivalente por linhas à A. Vamos mostrar que o determinante de B é diferente de zero.

Como B é equivalente por linhas à A, existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_k$ tais que $B = E_1 \ldots E_k A$. Aplicando o determinante, obtemos

$$\det(B) = \det(E_1 \ldots E_k A) = \det(E_1 \ldots E_k) \cdot \det(A) = \det(E_1) \ldots \det(E_k) \cdot \det(A).$$

Como $E_1, \ldots, E_k$ são matrizes elementares, temos que $\det(E_i) \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Por hipótese A é não-singular, isto é, $\det(A) \neq 0$. Portanto

$$\det(B) = \det(E_1) \ldots \det(E_k) \cdot \det(A) \neq 0$$

e segue que B é não-singular.

5. Lembre que uma matriz A é simétrica se $A = A^T$. Encontre a dimensão do espaço vetorial de todas as matrizes simétricas 3×3.

Solução: Por definição, a dimensão de um espaço vetorial é igual ao número de elementos de uma base. Neste caso, vamos encontrar uma base para o espaço vetorial das matrizes simétricas 3×3.

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz simétrica 3×3, isto é, $A = A^T$. A condição $A = A^T$ nos diz que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Ou seja, $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$ e $a_{23} = a_{32}$. Assim, podemos escrever o espaço vetorial das matrizes simétricas 3×3 como

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \mid a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Portanto, uma base é

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

e segue que a dimensão do espaço vetorial de todas as matrizes simétricas 3×3 é igual a 6.