



MA111 - TERCEIRA PROVA  
03/06/2016, CURSÃO



RA	Nome
----	------

Questão	Nota máxima	Nota obtida
1	2,0	
2	2,0	
3	2,0	
4	4,5	
Bônus	1,0	
Nota final	11,5	

### INSTRUÇÕES

**POR FAVOR, DESLIGUE O CELULAR!**

**É PROIBIDO O USO DE CALCULADORA!**

Justifique claramente as respostas. Podem ser usados todos os conceitos já discutidos no curso. Conceitos adicionais, se forem utilizados, devem ser introduzidos.

Resolva cada questão/item na folha onde ele está enunciado – há uma folha de rascunho no fim.

1. (**2 pontos**) Considere a função  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ .

Descreva seu domínio, sua imagem, eventuais simetrias, comportamentos assintóticos, seus intervalos de crescimento, decrescimento e a existência de pontos críticos ou de inflexão.

Por fim, esboce o gráfico da função consistente com todas essas informações.

2. (**2 pontos**) Sabendo que  $f(2) = 3$ ,  $f(3) = 5$ ,  $f'(2) = \pi$  e  $f'(3) = \sqrt{2}$ , obtenha:

- (a) a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $x = 2$ ;
- (b) a equação da reta tangente ao gráfico de  $f^{-1}$  em  $x = 3$ .

3. (2 pontos) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- (a) Obtenha, se existirem, máximo, mínimo, supremo e ínfimo de  $f$  no intervalo  $[-1, \pi]$ ;
- (b) Decida se  $f$  é contínua em 0;
- (c) Decida se  $f$  é diferenciável em 0;
- (d) Decida se  $g(x) = xf(x)$  é diferenciável em 0.

4. (4,5 pontos) Classifique os itens a seguir em Verdadeiro ou Falso.

Demonstre, se for verdadeiro, exiba um contra-exemplo, se for falso.

(a) Se  $f$  é uma função diferenciável e  $f'(a) = 0$ , então  $f$  não pode ter inversa.

- (b) Se  $f$  e  $g$  são funções diferenciáveis tais que  $f'(x) > 0$  e  $g'(x) < 0$  para todo  $x$ , então  $f \circ g$  é inversível e sua inversa é diferenciável.

(c) Se  $f$  é uma função integrável,  $a, b, c$  constantes, com  $c > 0$ , então

$$\int_{ca}^{cb} f(t) dt = c \int_a^b f(ct) dt.$$

Bônus (1 ponto) Prove que se  $f$  é uma função crescente, contínua e positiva, então

$$\int_a^b f^{-1} + \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a).$$



Rascunho