# MA111 - Primeira Prova

01/04/2016, Cursão

| **RA** | **Nome** |
|---|---|
| | |

| **Questão** | **Nota máxima** | **Nota obtida** |
|---|---|---|
| **1** | **2,0** | |
| **2** | **2,0** | |
| **3** | **6,0** | |
| **x** | **0,5** | |
| **Nota final** | **10,5** | |

## INSTRUÇÕES

**POR FAVOR, DESLIGUE O CELULAR**

**É PROIBIDO O USO DE CALCULADORA**

**Justifique claramente as respostas**
**Resolva cada questão/item na folha onde ele está enunciado – há uma folha de rascunho no fim.**

1. (**2 pontos**) Descreva o conjunto de todos os números reais $x$ que satisfazem cada uma das seguintes desigualdades:

   (a) $2\,|x-3| < 1$;

   (b) $f(x) \leq x^2$, onde $f$ é a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

2. (**2 pontos**)

(a) Calcule o seguinte limite: $\lim_{h \to 0} \frac{(c+h)^2 - c^2}{h}$, onde $c \in \mathbb{R}$.

(b) Sabendo que a função $g$ satisfaz $\lim_{x \to 1} g(x) = 0$, calcule (e justifique!) $\lim_{x \to 1} \left[ g(x) \operatorname{sen}\left( \frac{1}{x^2 - 1} \right) \right]$.

3. (**6 pontos**) Classifique os itens a seguir em Verdadeiro ou Falso.
Demonstre, se for verdadeiro, exiba um contra-exemplo, se for falso.

(a) Se $g \circ f = I$, com $I(x) = x$ para todo $x$, então $x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$.

(b) Se $|h|$ é uma função contínua no ponto $a$, então $h$ é contínua no ponto $a$ (lembre que a função $|h|$ é definida como $|h|(x) := |h(x)|$).

(c) Se $f$, $g$ e $h$ são funções tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x$ e $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$, então $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$.

(d) A função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{se } x = \frac{p}{q}, \text{ na forma irredutível,} \\ 1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

é contínua em $x = 1$.

Questão Extra (**0,5 ponto**): Considere que Bolas são coloridas, como bolas de bilhar. Considere conjuntos com $n$ bolas coloridas, $n \in \mathbb{N}$. Vamos demonstrar a seguinte afirmação:

Qualquer conjunto com $n$ bolas tem todas as bolas da mesma cor.

A demonstração é feita usando o princípio de indução forte.

- O caso $n = 1$ é imediato pois um conjunto com uma única bola só tem bola de uma cor.
- Assuma que todo conjunto com até $k$ bolas só tem bolas de uma cor. Dado um conjunto com $k + 1$ bolas, ordene-as de 1 até $k + 1$. Considere o conjunto das bolas 1 e 2. Como esse é um conjunto com menos que $k$ bolas, pela hipótese de indução, todas têm a mesma cor. Da mesma forma, considere o conjunto das bolas 2, 3, ..., $k+1$. Como esse conjunto tem $k$ bolas, pela hipótese de indução, todas têm a mesma cor. Como a bola 2 está em ambos os conjuntos, todas as bolas têm a mesma cor que ela e, portanto, todo conjunto de $k+1$ bolas possui bolas da mesma cor. ■

Essa prova está correta? Por quê?

Rascunho