

## 1 Prova 1

**Questão 1.** Calcule o argumento e o argumento principal de  $(\sqrt{3} - i)^6$ .

**Questão 2.** Mostre que as funções complexas a seguir não são diferenciáveis em zero.

a)  $f(z) = \bar{z}$ ;

b)  $g(z) = \bar{z}(z + \pi)^7$ .

**Questão 3.** Considere  $\log$  o ramo do logaritmo definido em  $r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$ . Prove que  $z \mapsto \log z$  é diferenciável em todo ponto do domínio e calcule sua derivada.

**Questão 4.** Calcule (o conjunto):  $(1 + i)^i$ .

**Questão 5.** Calcule  $\int_C f(z)dz$  onde  $f(z) = (z + 2)/z$  e  $C$  o semicírculo descrito por  $z = 2e^{i\theta} (0 \leq \theta \leq \pi)$ .

## 2 Prova 2

**Justifique TODAS as etapas da sua solução**

**Questão 6.** .

a) Enuncie corretamente o teorema de Cauchy-Goursat;

b) Calcule a integral

$$\int_C \frac{\cos(z^3 + \pi)}{10 + z} dz$$

onde  $C$  é o contorno simples fechado dado pela circunferência de raio 1 positivamente orientada.

**Questão 7.** .

a) Enuncie corretamente o teorema da fórmula de Cauchy.

b) Calcule a integral a seguir, usando o teorema da fórmula de Cauchy, checando corretamente as hipóteses.

$$\int_C \frac{\cos(z)}{z(z^2 + 8)} dz.$$

Onde  $C$  é o contorno positivamente orientado dado pelos lados contidos nas retas  $x = \pm 3, y = \pm 2$ .

**Questão 8.** Encontre a série de Laurent centrada em zero de

- $\frac{1}{z^2(1-z)}$  em  $0 < |z| < 1$
- $\frac{1}{z^2(1-z)}$  em  $1 < |z| < \infty$

**Questão 9.** Seja  $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n$ . Se existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $S(z_0)$  converge, então se  $z \in \mathbb{C}$  é tal que  $|z| < |z_0|$ , então a série converge em  $z$ .

**Questão 10.** .

- a) Defina o que é raio de convergência da série de potência  $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n$ ;
- b) Prove que o raio de convergência da série  $\sum_{k=0}^{\infty} z^n$  é 1.

### 3 Prova 3

**Questão 11.**

- a) Defina o que é resíduo de uma função  $f$  no polo  $z_0$ ;
- b) Encontre o resíduo em  $z = 0$  de  $f(z) = z \cos(\frac{1}{z})$ .

**Questão 12.**

- a) Enuncie o Teorema dos Resíduos de Cauchy;
- b) Seja  $C$  o círculo positivamente orientado de raio 3. Calcule

$$\int_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz$$

**Questão 13.** Calcule o resíduo em  $z = i$  de  $\frac{z^{1/2}}{(z^2+1)^2}$  no domínio ( $|z| > 0, 0 < \arg(z) < 2\pi$ ).

**Questão 14.** Calcule em detalhes

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$$

**Questão 15.** (Questão Extra - 1 Ponto) Utilizando o teorema dos resíduos calcule:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2 + 1} dx$$