Dinâmica Hiperbólica e Teoria Ergódica

J. RÉGIS A. VARÃO FILHO

. . . .

Sumário

1 Introdução

Use estas notas com cuidado: Elas estão incompletas e contêm erros. A seção do teorema da variedade estável e entropia estão bagunçadas, ignore-as.

Estas notas ainda estão em fase inicial, por isso é possível que certos conceitos apareçam antes da sua definição; alguns resultados não tenham a demonstração; assim como erros tipográficos. No entanto, ao longo do tempo, espera-se que todos esses problemas sejam sanados.

Para ampliar o entendimento da teoria, ao longo do texto acrescentei algumas observações. Em geral, estes comentários fornecem resultados mais gerais cuja demonstração foge do enfoque destas notas.

A versão mais recente deste trabalho está disponível em

www.impa.br/~jregis

Para comentários e sugestões me manda um e-mail

jregis@impa.br

2 Conceitos Gerais

Se nada for dito assumiremos X um espaço topológico, localmente compacto e Hausdorff.

Definição 2.1. Dizemos que $x \in X$ é um ponto *não-errante* para $f : X \to X$ contínua, se: dada uma vizinhança $\mathcal{U}$ de x, existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Caso contrário, dizemos que x é *errante*. Denotamos o conjuntos dos pontos não errantes de f por $\Omega = \Omega(f)$.

Proposição 2.1.

- Ω é fechado e $f(\Omega) \subset \Omega$.
- Se f for um homeomorfismo $f(\Omega) = \Omega$. Um ponto é não errante para f se, e somente se, for não-errante para f^{-1}.

Demonstração. O conjunto dos pontos errantes é aberto. De fato, seja x errante, então existe vizinhança U tal que $f^n(U) \cap U = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. É fácil ver que todos os pontos de U são errantes, dado $y \in U$ tome uma vizinhança V de y pequena o suficiene de forma que esteja em U, assim $f^n(V) \cap V \subset f^n(U) \cap U = \emptyset$. Portanto, Ω é fechado, já que é o complementar de um conjunto aberto. Para ver que $f(\Omega) \subset \Omega$ é igualmente simples.

Suponha agora que f seja um homemomorfismo. Seja $x \in \Omega$, provando que $f^{-1}(x)$ é não-errante implica que $f(\Omega) = \Omega$. Dado U vizinhança de $f^{-1}(x)$, então $f(U)$ é vizinhança de x, logo existe n tal que $f^n(f(U)) \cap f(U) \neq \emptyset \Rightarrow f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. A última afirmação segue da observação: $f^n(U) \cap U \neq \emptyset \Leftrightarrow U \cap f^{-n}(U) \neq \emptyset$. □

Proposição 2.2. *Seja $x \in \Omega(f)$. Dado U vizinhança de x, então existe uma sequência de pontos n_i tendendo ao infinito tal que $f^{n_i}(U) \cap U \neq \emptyset$.*

Demonstração. Fazemos por absurdo. Construa uma sequência $x_k \to x$ tal que $f^{n_k}(x_k) \to x$, isso é possível pela própria definição de x. Sendo n_k limitado, peguemos uma subsequência tal que seja constante igual a $l \in \mathbb{N}$. Ou seja, $f^l(x_k) \to x \Rightarrow f^l(x) = x$. Portanto x é periódico, mas se x é periódico então existem infinitos n_i com a propriedade negada, logo absurdo. □

Dada uma função contínua $f : X \to X$ e um ponto $x \in X$, definimos

$$\omega_f(x) = \{y \in X \mid \exists \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}},\ n_i \to \infty \text{ t. q. } \lim_{i \to \infty} f^{n_i}(x) = y\}$$

Se f for um homeomorfismo podemos definir

$$\alpha_f(x) = \{y \in X \mid \exists \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}},\ n_i \to \infty \text{ t. q. } \lim_{i \to \infty} f^{-n_i}(x) = y\}$$

Em geral omitimos o sub-índice f, denotando apenas por $\omega(x), \alpha(x)$ quando não houver dúvida sobre qual função estamos trabalhando. Chamamos também de conjuntos ω-limite e α-limite.

Definimos o conjunto **limite** $L(f)$ por

$$L(f) = L_+(f) \bigcup L_-(f), \text{ onde } L_+(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x)}, \; L_-(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \alpha(x)}$$

Proposição 2.3. *$L(f) \subset \Omega(f)$.*

Demonstração. Seja $y \in L_+(f)$, o outro caso é análogo. Como Ω é fechado basta considerar o caso em em que y é aproximado por pontos não-errantes. Logo, podemos supor $y \in \omega(x)$. Seja U vizinhança de y, então existem inteiros $m > n > 0$ tal que $f^m(x), f^n(x) \in U$. Logo como $f^{m-n}(f^n(x)) = f^m(x)$, então $f^{m-n}(U) \cap U \neq \emptyset$. $\square$

Denotando por $Per(f)$ o **conjunto dos pontos periódicos de f**. Note que

$$Per(f) \subset L(f) \subset \Omega(f)$$

Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ funções contínuas. Dizemos que **f é topologicamente conjugada a g** se existe um homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

comuta. Isto é: $h \circ f = g \circ h$.

É fácil ver que: ser topologicamente conjugado define uma relação de equivalência. A comutatividade do diagrama acima, significa que a dinâmica da f é igual a dinâmica da g do ponto de vista topológico.

Mesmo que X e Y sejam variedades, pedir que a conjugação h seja suave é muito forte. Pela regra da cadeia teríamos

$$DhDf = DhDg \Rightarrow Dg = DhDf(Dh)^{-1}.$$

Significa que Df e Dg são similares, em particular possuem os mesmo autovalores. Com isso se considerarmos $X = Y = \mathbb{R}^2$ e f, g como sendo as transformações lineares definidas respectivamente por

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

vemos que esses dois sistemas possuem mesma dinâmica. Um ponto fixo no *zero* que repele todo mundo, mas não seriam conjugadas.

Definição 2.2. Seja X compacto. Um conjunto $Y \subset X$ é *minimal* se for f invariante, fechado e não contém propriamente nenhum outro subconjunto fechado e invariante.

Proposição 2.4. *Sejam X compacto e $f : X \to X$ contínua. Então X contém um conjunto minimal para f.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ a coleção dos conjuntos fechados e invariantes. Note que $X \in \mathcal{C}$. Dotamos $\mathcal{C}$ de uma ordem parcial dada por: $A \prec B$ se $A \supset B$. Suponha que $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$ seja um conjunto totalmente ordenado. Como a interseção de compactos encaixantes não é vazia temos que $\cap_{K \in \mathcal{K}} K$ é maior que qualquer outro elemento de $\mathcal{K}$. Pelo lema de Zorn existe um maximal, que é, portanto, um conjunto minimal. □

Definição 2.3. $f : X \to X$ é *transitiva* se existe $x \in X$ cuja órbita seja densa.

Dizemos que um conjunto $\mathcal{R} \subset Y$ em um espaço topológico Y é **residual** se $\mathcal{R} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} V_i$ onde V_i é aberto e denso em Y. Nossa hipótese sobre X garante que no caso em que $Y = X$ vale o Teorema de Baire: $\mathcal{R}$ é denso em X.

Observação 2.1. Pugh[1] mostrou que em $Diff^1(M)$ existe um conjunto residual para o qual
$$\overline{Per(f)} = \Omega(f).$$

Proposição 2.5. *Seja $f : X \to X$ contínua. Se dado dois abertos U, V sempre existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, então existe um conjunto residual, $\mathcal{R}$, tal que se $x \in \mathcal{R}$ então $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é densa em X.*

Demonstração. Seja $\{V_i\}$ uma base enumerável da topologia. Por hipótese $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(V_i)$ é aberto e denso. Portanto
$$Y = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(V_i)$$
é um residual. Se $y \in Y$, dado qualquer aberto U tome $V_{i_0} \subset U$. Existe n_0 tal que $f^{n_0}(y) \in V_{i_0} \subset U$. Conclui-se que $\mathcal{O}(y)$ é denso.

□

Corolário 2.1. *f é transitiva se, e somente se, existe residual $\mathcal{R}$ de pontos com órbita densa.*

Definição 2.4. Dizemos que $f : X \to Y$ é *topologicamente misturadora*, se dado dois abertos $U, V \subset X$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que: $\forall n \geq n_0$, então $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

[1]Pugh,C; **An improved closing lemma and a general density theorem**, *Amer. J. Math*, 89 (1967)

Exercícios

Exercício 2.1. Os conjuntos ω,α-limite são fechados e invariantes.

Exercício 2.2. Sejam f e g conjugadas, por h como na notação acima. Então

- $\omega_f(x) = \omega_g(h(x))$, analogamente para o α-limite;
- $h(Per(f)) = Per(g)$.

onde $Per(.)$ é o conjunto dos pontos periódicos.

Exercício 2.3. Sejam X compacto e $f : X \to X$ contínua.

- $Y \subset X$ é minimal $\Leftrightarrow \omega(y) = Y\ \forall y \in Y$;
- Y é minimal $\Leftrightarrow \mathcal{O}^+(y)$ é denso em $Y\ \forall y \in Y$.

Exercício 2.4. Sejam $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ funções contínuas.

- Exemplo de f, g transitivas, mas $f \times g : X \times Y \to X \times Y$ não seja transitiva;
- No item acima, se g for topologicamente misturadora, então $f \times g$ é transitiva. Dê exemplo.

Exercício 2.5. Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo que preserva a métrica de X, isto é $d(f(x), f(y)) = d(x, y)\ \forall x, y \in X$.

a) f não pode ser topologicamente mixing;

b) Se f é transitiva, então f é minimal.

3 Hiperbolicidade

Conjuntos hiperbólicos possuem muitas propriedades importantes. Esta riqueza permite desenvolver uma vasta teoria para a dinâmica sobre estes conjuntos.

3.1 Conjunto Hiperbólico

Consideremos $f : M \to M$ um difeomorfismo e M uma variedade Riemanniana.

Definição 3.1. Um conjunto fechado $\Lambda \subset M$ invariante por f é dito hiperbólico se existe $C > 0$, $\lambda \in (0,1)$ e para todo $x \in \Lambda$ existem $E^s(x)$, $E^u(x) \subset T_xM$ tais que

1. $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$;
2. $||df_x^n v^s|| \leq C\lambda^n ||v^s||$, $\forall v^s \in E^s(x)$ e $n \geq 0$;
3. $||df_x^{-n} v^u|| \leq C\lambda^n ||v^u||$, $\forall v^u \in E^u(x)$ e $n \geq 0$;
4. $df_x E^s(x) = E^s(f(x))$ e $df_x E^u(x) = E^u(f(x))$.

Dizemos que Λ, como acima, é conjunto hiperbólico **isolado** ou **maximal** se existe vizinhança $\mathcal{U}$ de Λ tal que

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\mathcal{U})$$

Proposição 3.1. *Os subespaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ variam continuamente com relação a $x \in \Lambda$.*

Demonstração. Seja $x_0 \in \Lambda$ e x_i uma sequência em Λ que converge a x_0.

Afirmação: $dimE^s(x_i) = dimE^s(x_0)$ e $dimE^u(x_i) = dimE^u(x_0)$ para i sificientemente grande.

Considere uma subsequência de x_i que ainda denotaremos por x_i de modo que $dimE^s(x_i)$ seja constante, digamos igual a k. Considere uma base ortonormal $w_{1,i}, \ldots, w_{k,i}$ de $E^s(x_i)$, passando a uma subsequência x_i', se necessário, podemos supor que $w_{l,i}$ converge a $w_{l,0}$. Note que $w_{1,0}, \ldots, w_{k,0}$ estão em $T_{x_0}M$. Por continuidade note que a condição 2 implica $w_{l,0}$, $l = 1, \ldots, k$, estarem em $E^s(x_0)$. Portanto

$$dimE^s(x_0) \geq k = dimE^s(x_i)$$

Analogamente temos que

$$dimE^u(x_0) \geq dimE^u(x_i)$$

a condição 1 implica que

$$dimE^s(x_0) = dimE^s(x_i),\ dimE^u(x_0) = dimE^u(x_i).$$

Fica provado assim a afirmação. E a continuidade segue facilmente, dado que em uma vizinhança de x_0 o fibrado tangente restrito a Λ possui trivialização da forma $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}$. $\square$

Observação 3.1. Anosov[2] forneceu um exemplo em que as distribuições (E^s, E^u) não são suaves. E Hasselblat[3] provou que "tipicamente", para o caso em que $\Lambda = M$, as distribuições são apenas Hölder.

Proposição 3.2. *Seja Λ um conjunto hiperbólico para f. Então existe uma métrica Riemanniana $< .,. >_*$, chamada de métrica adaptada, para o qual f satisfaz a condição de hiperbolicidade com constante $C' = 1$. Ou seja*

$$||dfv^s||_* \leq \lambda' ||v^s||_*,\ v^s \in E^s;$$

$$||dfv^u||_* \leq \lambda' ||v^u||_*,\ v^u \in E^u.$$

Demonstração. Se $v^s \in E^s$ e $v^u \in E^u$ definimos

$$||v^s||_*^2 = \sum_{j=0}^{n-1} ||df^j v^s||^2\ ; \quad ||v^u||_*^2 = \sum_{j=0}^{n-1} ||df^{-j} v^u||^2.$$

Note que as normas acima provêem de métricas, dado que temos uma soma de métricas. Com isso podemos definir a norma $||.||_*$ que provém de uma métrica.

$$||v||_* := \sqrt{||v^s||_*^2 + ||v^u||_*^2} \tag{1}$$

Como os cálculos para a parte E^u será análago, considere de agora em diante $v \in E^s$. Fixemos o número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/(1-\lambda^2) \leq n$.

$$\begin{aligned} ||dfv||_*^2 &= \sum_{j=0}^{n-1} ||df^j(dfv)||^2 = \sum_{j=0}^{n-1} ||df^{j+1}v||^2 = \sum_{j=1}^{n} ||df^j(dfv)||^2 \quad (2) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} ||df^j(v)||^2 + ||df^n v||^2 - ||v||^2 \leq ||v||_*^2 + C\lambda^n ||v|| \\ &- \ ||v||^2 \leq ||v||_*^2 - ||v||^2(1-(C\lambda^n)^2). \end{aligned}$$

[2]Anosov, D, **Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature**, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 90 (1969), 1-235

[3]Hasselblatt, B., **Regularity of the Anosov splitting and of Horospheric foliations**, *Ergod. Theory and Dyn. Syst.*, 14 (1994), no. 46:45-666

Estamos supondo que $C > 1$, caso contrário não haveria nada a fazer.

$$\begin{aligned}
||v||_*^2 = \sum_{j=0}^{n-1} ||df^j v||^2 &\leq ||v||^2 + C^2\lambda^2||v||^2 + \ldots + C^2\lambda^{2(n-1)}||v||^2 \\
&\leq C^2||v||^2 + C^2\lambda^2||v||^2 + \ldots + C^2\lambda^{2(n-1)}||v||^2 \\
&\leq C^2||v||^2(\frac{1-\lambda^{2(n-1)}}{1-\lambda^2}) \leq C^2||v||^2(\frac{1}{1-\lambda^2}) \\
&\leq C^2||v||^2 n.
\end{aligned}$$

Desta desigualdade obtemos $||v||_*^2/C^2 n \leq ||v||^2$. Fazendo a substituição na equação (2) obtemos

$$||dfv||_*^2 \leq ||v||_*^2 - ||v||^2(1-(C\lambda^n)^2) \leq ||v||_*^2 - (||v||_*^2/C^2 n)(1-(C\lambda^n)^2).$$

Portanto

$$||dfv||_*^2 \leq (1-(1-(C\lambda)^2)/C^2 n)||v||_*^2$$

Fazendo o mesmo para v^u assim, obtemos que $||.||_*$ definida como em (1) é uma norma do "tipo que procuravamos".

Apenas provamos que a decomposição do fibrado tangente em $E^s \oplus E^u$ é apenas contínua, portanto para considerar uma métrica suave devemos tomar uma métrica suficientemente próxima da que construimos acima.

□

3.2 Teorema de Hartman-Grobman

O próximo resultado é um prelúlio do estudo qualitativo apresentado na próxima seção com o teorema da variedade estável-instável. O teorema de Hartman-Grobamn nos fornece variedades topológicas estáveis e instáveis, todavia não provaremos, ainda, que ela são variedades diferenciáveis.

Definição 3.2. Dizemos que uma transformação linear ou a matriz que ela representa $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de *hiperbólica* se todos os autovalores de A possuem norma diferente de 1.

Portanto um ponto fixo p para uma transformação $f : M \to M$ é hiperbólico se Df_p for uma matriz hiperbólica.

Teorema 3.3 (Hartman-Grobman)**.** *Seja $f \in Diff^r(M)$ e $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico de f; denote $A = Df_p : T_pM \to T_pM$. Então existe uma vizinhança $V(p) \subset M$ de p e $U(0) \subset T_pM$ de 0 e um homeomorfismo $h : U \to V$ tal que*

$$hA = fh$$

Demonstração. (De [9])

Como o problema é local, olhamos f em coordenadas e por isso podemos considerar que f seja um difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ com zero um ponto fixo hiperbólico.

Lema 3.1. *Sejam $L, G \in \mathcal{L}(E, E)$ isomorfismos de um espaço de Banach E satisfazendo $||L|| < a < 1$ e $||G^{-1}|| < a < 1$, então*

i) $I + L$ é um isomorfismo e $||(I + L)^{-1}|| < 1/(1 - a)$;

ii) $I + G$ é um isomorfismo e $||(I + G)^{-1}|| < a/(1 - a)$.

Demonstração. i) Para ver que é um isomorfismo. Dado $y \in E$ queremos encontrar único $x \in E$ tal que $x + Lx = y$. Considere $u : E \to E$, $u(x) = y - Lx$. Note que u é uma contração portanto existe único ponto fixo.

Para calcular a norma de $(I + L)^{-1}$, tome $y \in \mathbb{R}^n$ unitário. Existe x tal que

$$x + Lx = y \Rightarrow 1 = ||y|| \geq ||x|| - ||L||\,||x|| \geq ||x||(1 - a)$$

E como $(I + L)^{-1}(y) = x$ fica provado o primeiro item.

ii) Para provar que é isomorfismo usamos novamente a técnica de ponto fixo. Dado y queremos achar único x tal que $x + Gx = y$, sendo G isomorfismo equivale a equação $G^{-1}x + x = G^{-1}y$. Analogamente vemos que a função $u(x) = G^{-1}y - G^{-1}x$ é uma contração e portanto possúi único ponto fixo.

Dado y unitário,

$$(I + G)^{-1}y = x \Rightarrow y = x + Gx \Rightarrow G^{-1}y = G^{-1}x + x$$

logo $a \geq ||G^{-1}y|| \geq ||x|| - ||G^{-1}x|| \geq ||x||(1 - a)$. Como queríamos.

□

Lembre que $A = Df_0$ e sendo A hiperbólica existem subespaços estáveis e instáveis, respectivamente E^s e E^u invariantes por A tal que $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$; para um $a < 1$ real vale

$$||A^s v|| < a||v|| \ \forall v \in E^s$$

$$||(A^u)^{-1} v|| < a||v|| \ \forall v \in E^u$$

Onde $A^s = A|_{E^s}$ e $A^s = A|_{E^s}$

$C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é o conjunto das funções contínuas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ limitadas. Este conjunto munido da norma do sup ($||f|| = sup\{||f(x)|| \mid x \in \mathbb{R}^n\}$) é um espaço de Banach. $C_b^0(\mathbb{R}^n)$ pode ser visto como a soma direta

$$C_b^0(\mathbb{R}^n) = C_b^0(\mathbb{R}^n, E^s) \oplus C_b^0(\mathbb{R}^n, E^u)$$

basta notar que para isso basta fazer a projeção de $f \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ em E^s ou E^u.

O próximo lema é o coração da prova.

Lema 3.2. *Existe $\epsilon > 0$ tal que se $\phi_1, \phi_2 \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ possuem constante de Lipschitz menor que ϵ, então $A + \phi_1$ e $A + \phi_2$ são conjugadas.*

Demonstração. Queremos encontrar um homeomorfismo $h \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tal que $h \circ (A + \phi_1) = (A + \phi_2) \circ h$, o que faremos é buscar uma tal h da forma $I + u$ com $u \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Portanto

$$(I + u) \circ (A + \phi_1) = (A + \phi_2) \circ (I + u)$$

Da equação acima temos:

$$\phi_1 - \phi_2(I + u) = Au - u(A + \phi_1)$$

Definimos o seguinte operador:

$$\mathcal{L} : C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

$$\mathcal{L}(u) = Au - u(A + \phi_1)$$

Definimos $\mathcal{L}_0(u) = u - A^{-1}u(A + \phi_1)$

Afirmação: Para ϵ suficientemente pequeno $A + \phi_1$ é um homeomorfismo.

Basta considerar um $\epsilon < min\{1/\beta, \alpha\}$ onde $||A|| \geq \alpha > 0$ e $||A^{-1}|| \leq \beta$.

Injetividade: $||Ax + \phi_1(x) - Ay - \phi_1(y)|| \geq ||Ax - Ay|| - ||\phi_1(x) - \phi_1(y)|| \geq \alpha||x - y|| - \epsilon||x - y|| = (\alpha - \epsilon)||x - y||$

Sobrejetividade: Dado y quero achar x tal que $Ax + \phi_1(x) = y$. Defina $c(x) := A^{-1}y - A^{-1}\phi_1(x)$, que é uma contração. Logo existe único x tal que $A^{-1}y - A^{-1}\phi_1(x) = x \Rightarrow Ax + \phi_1(x) = y$.

Continuidade de $(A + \phi_1)^{-1}$: Tome $Ax_n + \phi_1(x_n)$ convergindo a $Ax + \phi_1(x)$, então $x_n + A^{-1}\phi_1(x_n) \to x + A^{-1}\phi_1(x)$. Dado ϵ_1 para n grande temos $\epsilon_1 \geq ||x_n + A^{-1}\phi_1(x_n) - (x + A^{-1}\phi_1(x))|| \geq ||x_n - x|| - ||A^{-1}\phi_1(x_n) - A^{-1}\phi_1(x)|| \geq ||x_n - x|| - \beta\epsilon||x_n - x|| = (1 - \beta\epsilon)||x_n - x||$. Logo $||x_n - x|| \leq \epsilon_1/((1 - \beta\epsilon))$. $\square$ (**Afirmação**)

Vejamos que $||\mathcal{L}_0^{-1}|| \leq 2/(1 - a)$. Olhemos para as funções $u^s \mapsto A^{-1}u^s(A + \phi_1)$ cuja inversa é $u^s \mapsto A^s u^s(A + \phi_1)^{-1}$ é contração. E $u^u \mapsto (A^u)^{-1}u^u(A + \phi_1)$ é uma contração. $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0^s + \mathcal{L}_0^u$ onde $\mathcal{L}_0 : C_b^b(\mathbb{R}^n, E^s) \oplus C_b^b(\mathbb{R}^n, E^u) \to C_b^b(\mathbb{R}^n, E^s) \oplus C_b^b(\mathbb{R}^n, E^u)$. Como $a/(1 - a) < 1/(1 - a)$, pelo lema anterior, aplicado a $\mathcal{L}^s$ e $\mathcal{L}^u$, segue que $||\mathcal{L}_0^{-1}|| \leq 2/(1 - a)$. Consequentemente $||\mathcal{L}^{-1}|| \leq ||A^{-1}||\ ||\mathcal{L}_0^{-1}|| \leq 2||A^{-1}||/(1 - a)$.

Considere $\alpha : C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dada por $\alpha(u) = \mathcal{L}^{-1}(\phi_1 - \phi_2(I - u))$. Vejamos que α é uma contração. $||\alpha(u_1) - \alpha(u_2)|| = ||\mathcal{L}^{-1}(\phi_2(I + u_2) - \phi_2(I + u_1))|| \leq ||\mathcal{L}^{-1}||\ ||\phi_2||\ ||u_2 - u_1|| \leq 2\epsilon/(1 - a)||u_2 - u_1||$. E como ϵ é pequeno, temos uma contração. Portanto existe um único ponto fixo u

$$\alpha(u) = u$$

que é o que buscávamos.

Entretanto falta provarmos que $I + u$ é um homeomorfismo. Por unicidade existe único v tal que

$$(A + \phi_1)(I + v) = (I + v)(A + \phi_2)$$

De fato $I + v$ é a inversa de $I + u$, isto porque

$$(I + v)(I + u)(A + \phi_1) = (I + v)(A + \phi_2)(I + u) = (A + \phi_1)(I + v)(I + u)$$

E como $(I + v)(I + u)$ é da forma $I + w$ com $w = u + v(I + u)$ temos que $(I + v)(I + u) = Id$, analogamente $(I + u)(I + v) = Id$.

$\square$

Lema 3.3. *Dado ϵ existe uma vizinhança U de 0 e uma extensão de $f|_U$ para $\mathbb{R}^n$ da forma $A+\phi$ onde $C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tem constante de Lipschitz menor que ϵ.*

Demonstração. Considere uma função suave $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t) \in [0, 1]$; para $t \leq 1/2$ $\gamma(t) = 1$; para $t \geq 1$ $\gamma(t) = 0$.

$f = A + \psi$ onde $\psi(0) = 0$ e $D\psi_0 = 0$. Seja $r > 0$, defina $\phi(x) = \gamma(||x||/r)\psi(x)$. Para $x, y \in B(0, r)$

$$\begin{aligned} ||\phi(x) - \phi(y)|| &= ||\gamma(||x||/r)\psi(x) - \gamma(||x||/r)\psi(y) + \gamma(||x||/r)\psi(y) \\ &- \gamma(||y||/r)\psi(y)|| \leq ||\gamma(||x||/r)|| \; ||\psi(x) - \psi(y)|| \\ &+ ||\psi(y)|| \; ||\gamma(||x||/r) - \gamma(||y||/r)|| \\ &\leq \sup_{B(0,r)} ||D\psi|| \; ||x - y|| \\ &+ ||y|| \sup_{B(0,r)} ||D\psi|| \sup_{\mathbb{R}} ||\gamma'|| \; ||x - y||/r \end{aligned}$$

Para que a constante e Lipschitz de ϕ seja menor que ϵ tomemos r pequeno o suficiente para que $\sup_{B(0,r)} ||D\psi|| < \epsilon/2$ e $\sup_{B(0,r)} ||D\psi|| < \epsilon/2$.

Para $x \in B(0, r)$ e $y \notin B(0, r)$, como $\phi(y) = 0$ podemos tomar $\widetilde{y}$ em $\overline{B(0, r)}$ tal que $\phi(y) = \phi(\widetilde{y})$ e portanto usamos o resultado acima. No caso de $x, y \notin B(0, r)$ a função se anula. $\square$

A conclusão do teorema segue dos lemas acima, dado que localmente tenho $f = A + \phi$ e portanto conjugada a A.

$\square$

Exercícios

Exercício 3.1. Prove o resultado de Hartman-Grobman em dimensão 1.

4 Teorema da Variedade Estável/Instável

Daremos a prova do importante Teorema da Variedade Estável/Instável. Será uma prova longa, porém frutífera. Além de, obviamente, utilizarmos fortemente o teorema nas seções subsequentes, como escólios da demonstração formalizaremos o conceito de cones invariantes e como os utilizamos para podermos "perturbar" conjuntos hiperbólico e obtermos novos conjuntos hiperbólicos.

Como olhamos as funções (definidas em variedades) por meio de cartas, o estudo local é sempre restringido ao estudo do que se passa em $\mathbb{R}^n$. Por isso o próximo teorema, que de fato "é" o teorema procurado, se passa em $\mathbb{R}^n$. Ele é mais geral do que precisamos, entretanto a demonstração para esse caso geral é literalmente a mesma para o caso em que trabalharemos (exceto para provar diferenciabilidade superiores a um das variedades, que não faremos aqui e também não a utilizaremos em nenhum momento. Acrescentamos, todavia, no enunciado por completeza).

Teorema 4.1 (Teorema de Hadamard-Perron)**.** *Sejam $\lambda < \mu$, $r \geq 1$ e difeomorfismos de classe C^r*

$$f_m : \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}$$

$$f_m(x, y) = (A_m x + \alpha(x, y), B_m y + \beta_m(x, y)))$$

com $m \in \mathbb{N}$, $||(A_m)^{-1}|| < \mu^{-1}$, $||B_m|| < \lambda$, $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 0$. Considere reais γ e δ satisfazendo

$$0 < \gamma < min(1, \sqrt{\mu/\lambda} - 1)$$

$$0 < \delta < min\left(\frac{\gamma(\mu - \lambda)}{(1+\gamma)^2}, \frac{\mu - (1-\gamma)^2\lambda}{(1-\gamma)(\gamma^2 + 2\gamma + 2)}\right)$$

Para $||\alpha_m||_{C^1} < \delta$ e $||\beta_m||_{C^1} < \delta$ e $m \in \mathbb{Z}$ existem

1) uma única família $\{W_m^+\}_{m\in\mathbb{Z}}$ de variedades C^1 k-dimensionais e

$$W_m^+ = \{(x, \phi_m^+(x)) \mid y \in \mathbb{R}^k\} = graph\ \phi_m^+$$

2) uma única família $\{W_m^-\}_{m\in\mathbb{Z}}$ de variedades C^1 k-dimensionais e

$$W_m^- = \{(x, \phi_m^-(x)) \mid y \in \mathbb{R}^{n-k}\} = graph\ \phi_m^-$$

onde $\phi_m^+ : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$, $\phi_m^- : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$, $\sup\limits_{m\in\mathbb{Z}} ||D\phi_m^\pm|| < \gamma$ e valem

i) $f_m(W_m^-) = W_{m+1}^-$, $f_m(W_m^+) = W_{m+1}^+$;

ii) $||f_m(z)|| < \lambda'||z||$, *para* $z \in W_m^-$, $||f_{m-1}^{-1}(z)|| < (\mu')^{-1}||z||$, *para* $z \in W_m^+$*;*

onde $\lambda' := (1+\gamma)(\lambda + \delta(1+\gamma)) < \mu/(1+\gamma) - \delta =: \mu'$

iii) Seja $\lambda' < \nu < \mu'$*. Se* $||f_{m+L-1} \circ \ldots \circ f_m(z)|| < C\nu^L||z||$ $\forall L \in \mathbb{N}$ *e para algum* $C > 0$*, então* $z \in W_m^-$*;*

Analogamente, se $||f_{m+L}^{-1} \circ \ldots \circ f_m(z)|| < C\nu^{-L}||z||$ $\forall L \in \mathbb{N}$*e para algum* $C > 0$*, então* $z \in W_m^+$*;*

Se $\lambda < 1 < \mu$ *as família* $\{W_m^+\}$ *e* $\{W_m^+\}$ *são variedades de classe* C^r*.*

Demonstração. (De [5])

Denotamos por $C_\gamma(\mathbb{R}^k)$ o conjunto das funções $\phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ Lipschitz de constante γ. E $C_\gamma^0(\mathbb{R}^k)$ quando $\phi(0) = 0$.

Lema 4.1. *Se* $\phi \in C_\gamma(\mathbb{R}^k)$*, então* $f_m(graph\ \phi) = graph\ \psi$*, para alguma* $\psi \in C_\gamma(\mathbb{R}^k)$*. Analogamente para o caso caso* $C_\gamma(\mathbb{R}^k)$*.*

Demonstração. Para ver que $f_m(graph\ \phi)$ é o gráfico de uma função, provemos que a função

$$\begin{array}{rcl} G_m^\phi : \mathbb{R}^k & \to & \mathbb{R}^k \\ x & \mapsto & A_m x + \alpha(x, \phi(x)) \end{array}$$

é uma bijeção. Dado $x_0 \in \mathbb{R}^k$ encontremos um único $x \in \mathbb{R}^k$ tal que $G_m^\phi(x) = x_0$. Basta checar que a função

$$\widetilde{G}_m^\phi(x) := A_m^{-1}x_0 - A_m^{-1}\alpha(x, \phi(x))$$

é uma contração.

$$\begin{array}{rcl} ||\widetilde{G}_m^\phi(x) - \widetilde{G}_m^\phi(y)|| & = & ||A_m^{-1}(\ \alpha(x,\phi(x)) - \alpha(y,\phi(y))\ )|| \\ & \leq & \mu^{-1}\delta(1+\gamma)||x-y|| \end{array}$$

Logo uma contração já que

$$\delta < \frac{\gamma(\mu - \lambda)}{(1+\gamma)^2} \leq \frac{\mu}{1+\gamma} \Rightarrow \mu^{-1}\delta(1+\gamma) < 1$$

Consequentemente, exite ψ tal que $f_m(graph\ \phi) = graph\ \psi$. Vejamos agora que ψ é γ-Lipschitz. Por definição de ψ

$$\begin{array}{rcl} ||\psi(G_m^\phi(x)) - \psi(G_m^\phi(y))|| & = & ||B_m\phi(x) + \beta(x,\phi(x)) - B_m\phi(y) \\ & - & \beta(y,\phi(y))|| \leq \lambda\gamma||x-y|| \\ & + & \delta(1+\gamma)||x-y|| = (\lambda\gamma + \delta + \delta\gamma)||x-y|| \end{array}$$

e

$$\begin{aligned}
||G_m^\phi(x) - G_m^\phi(y)|| &= ||A_m x + \alpha(x, \phi(x)) - A_m y + \alpha(y, \phi(y))|| \geq ||A_m x \\
&- A_m|| - ||\alpha(x, \phi(x)) - \alpha(y, \phi(y))|| \geq \mu ||x - y|| \\
&- \delta(1 + \gamma)||x - y|| = (\mu - \delta - \delta\gamma)||x - y||.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{||\psi(G_m^\phi(x)) - \psi(G_m^\phi(y))||}{||G_m^\phi(x) - G_m^\phi(y)||} \leq \frac{\lambda\gamma + \delta + \delta\gamma}{\mu - \delta - \delta\gamma} < \gamma$$

Terminando a demonstração deste lema. □

Na notação do lema podemos definir

$$\begin{aligned}
(f_m)_* : C_\gamma^0(\mathbb{R}^k) &\rightarrow C_\gamma^0(\mathbb{R}^k) \\
\phi &\longmapsto \psi
\end{aligned}$$

Defina a seguinte métrica em $C_\gamma^0(\mathbb{R}^k)$

$$d(\phi, \psi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}} \frac{||\phi(x) - \psi(x)||}{||x||}$$

Com esta métrica $C_\gamma^0(\mathbb{R}^k)$ é um espaço métrico completo. Com esta métrica provemos, com o lema abaixo, que $(f_m)_*$ é uma contração

Lema 4.2.

$$d((f_m)_*\phi, (f_m)_*\psi) \leq \frac{\lambda + \delta(1 + \gamma)}{\mu - \delta(1 + \gamma)} d(\phi, \psi), \ \forall \phi, \psi \in C_\gamma^0(\mathbb{R}^k)$$

e

$$\frac{\lambda + \delta(1 + \gamma)}{\mu - \delta(1 + \gamma)} < 1.$$

Demonstração. Denotemos $\phi' = (f_m)_*\phi$ e $\psi'(f_m)_*\psi$. Usaremos nas desigualdades abaixo o fato que $\psi' \in C_\gamma^0(\mathbb{R}^k)$.

$$\begin{aligned}
||\phi'(G_m^\phi(x)) &- \psi'(G_m^\phi(x))|| \\
&\leq ||\phi'(G_m^\phi(x)) - \psi'(G_m^\psi(x))|| + ||\psi'(G_m^\psi(x)) - \psi'(G_m^\phi(x))|| \\
&= ||B_m\phi(x) + \beta_m(x, \phi(x)) - B_m\psi(x) - \beta_m(x, \psi(x))|| \\
&+ \gamma||G_m^\psi(x) - G_m^\phi(x)|| \\
&\leq ||B_m\phi(x) - B_m\psi(x)|| + ||\beta_m(x, \phi(x)) - \beta_m(x, \psi(x))|| \\
&+ \gamma||A_m x + \alpha_m(x, \psi(x)) - A_m x - \alpha_m(x, \phi(x))|| \\
&\leq \lambda||\phi(x) - \psi(x)|| + \delta||\phi(x) - \psi(x)|| + \gamma\delta||\phi(x) - \psi(x)|| \\
&= (\lambda + \delta(1 + \gamma))||\phi(x) - \psi(x)||
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||G_m^\phi(x)|| &\geq ||A_m x|| - ||\alpha(x,\phi(x))|| \geq \mu||x|| - \delta(1+\gamma)||x|| \\ &= (\mu - \delta(1+\gamma))||x||. \end{aligned}$$

Combinando as desigualdades acima

$$\begin{aligned} \frac{||\phi'(G_m^\phi(x)) - \psi'(G_m^\phi(x))||}{||G_m^\phi(x)||} &\leq \frac{(\lambda+\delta(1+\gamma))}{(\mu-\delta(1+\gamma))}\frac{||\phi(x)-\psi(x)||}{||x||} \\ &\leq \frac{(\lambda+\delta(1+\gamma))}{(\mu-\delta(1+\gamma))} d(\phi,\psi). \end{aligned}$$

$$\gamma \leq 1 \Rightarrow \frac{\gamma}{1+\gamma} \leq \frac{1}{2}.$$

Então

$$\delta \leq \frac{\gamma(\mu-\lambda)}{(1+\gamma)^2} \leq \frac{(\mu-\lambda)}{2(1+\gamma)} \Leftrightarrow 2\delta(1+\gamma) \leq \mu - \lambda \Leftrightarrow \frac{\lambda+\delta(1+\gamma)}{\mu-\delta(1+\gamma)} < 1.$$

□

Denotemos por $C^0_\gamma = (C^0_\gamma)\mathbb{N}$ e definamos

$$\begin{aligned} f : C^0_\gamma &\longrightarrow C^0_\gamma \\ \{\phi_m\}_{m\in\mathbb{Z}} &\mapsto \{(f_m)_*\phi_m\}_{m\in\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Esta função f també é conhecida como *transformação de gráfico*. Introduzimos em C^0_γ uma métrica que torna f uma contração.

$$d(\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \{\psi_m\}_{m\in\mathbb{Z}}) = \sup_{m\in\mathbb{Z}} d(\phi_m,\psi_m)$$

Pelo teorema de contração em espaço métrico, f tem um único ponto fixo. Que são as $\{\phi_m^+\}$ apresentados no teorema.

□

Proposição 4.1. *Seja p um ponto periódico hiperbólico. Podemos tomar parametizações de modo que $W^s_{loc}(p)$ e $W^u_{loc}(p)$ sejam $\{0\}\times\mathbb{R}^{n-k}$ e $\mathbb{R}^k\times\{0\}$ respectivamente.*

Demonstração. Olhando em coordenadas, sabemos que as variedas são localmente gráficos de funções. A instável é o gráfico da função ϕ^u e a estável é o gráfico da ϕ^s. Defina

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} & \rightarrow & \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \\ (x,y) & \mapsto & (x - \phi^s(y), y - \phi^u(x)) \end{array}$$

A derivada de Φ no zero é a identidade. Portanto é um difeomorfismo local. Se $(x,y) \in W^u(p) \Rightarrow \Phi(x,y) = (x - \phi^s(y), 0) \subset \mathbb{R}^k \times \{0\}$. Se $(x,y) \in W^s(p) \Rightarrow \Phi(x,y) = (0, y - \phi^u(x)) \subset \mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}$.

$\square$

5 Dinâmica Hiperbólica

O Teorema da variedade estável, visto seção 4, terá sua tecnicalidade superada por meio da riqueza de resultados que obteremos nesta seção. O principal resultado desta seção, chamado de Lema de sombreamento, é um mecanismo de se "criar" pontos periódicos. As outras subseções seguem como uma aplicação deste resultado com exceção do Lambda-Lema. Este último resultado é apenas a formalização de um resultado muito intuitivo. Ele afimra que um disco tranversal a variedade estável de um ponto fixo se aproxima da variedade instável deste ponto.

5.1 Lema de Sombreamento

Dizemos que uma sequência $\{x_i\}$ em M é uma **δ-pseudo órbita** para f se $d(f(x_i), x_{i+1}) \leq \delta$. Um ponto $y \in M$ **ϵ-sombreia** a sequência $\{x_i\}$ se $d(f^i(y), x_i) \leq \epsilon$.

Teorema 5.1 (Lema de Sombreamento)**.** *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico para f. Dado $\epsilon > 0$, então existem $\eta, \delta > 0$ tais que se $\{x_i\}_{i=j_1}^{j_2}$ for uma δ-pseudo órbita para f com $d(x_i, \Lambda) < \eta$, então:*

- *Existe $y \in M$ com $d(y, \Lambda) < \eta$ tal que y ϵ-sombreia $\{x_i\}$. E mais*

    1. *Se $j_1 = -\infty$ e $j_2 = \infty$, então y é único;*
    2. *Se $\{x_i\}_{i=j_1}^{j_2}$ for periódica então y é ponto periódico;*
    3. *Se Λ for isolado, então $y \in \Lambda$.*

Demonstração. Se $p \in \Lambda$, então o espaço tangente em p se decompõe em $E^s_p \oplus E^u_p$. Seja $\mathcal{U}$ uma vizinhança de Λ para o qual conseguimos estender a decomposição invariante $E^s \oplus E^u$ em $\mathcal{U}$. Seja η pequeno o suficiente para que uma η-vizinhança, $\mathcal{U}_\eta$, de Λ esteja contido em $\mathcal{U}$.

Considere $B_p(r) = E^u_p(r) \oplus E^s_p(r) \subset T_pM$, denote $\mathcal{V}_p(r) := exp_p(B_p(r))$.

$$\begin{array}{rcl} F_j : B_{x_j}(r) & \rightarrow & B_{x_{j+1}}(C_0 r) \\ y & \mapsto & exp^{-1}_{x_{j+1}} \circ f \circ exp_{x_j} \end{array}$$

Podemos tomar δ pequeno o suficiente para que DF_j satisfaça as mesmas condições imposta no Teorema de Hadamard-Perron.

Façamos o caso em que $j_1 = -\infty$ e $j_2 = \infty$, para o caso finito a demonstração é parecida. Considere os conjuntos

$$\begin{array}{rcl} D^u_0 & = & \bigcap_{k=0}^{\infty} F_{-1} \circ \ldots \circ F_{-k}(B_{x_{-k}}(r)) \\ D^s_0 & = & \bigcap_{k=0}^{\infty} F_1^{-1} \circ \ldots \circ F^{-1}_{k-1}(B_{x_k}(r)) \end{array}$$

Na notação usada no Teorema de Hadmard-Perron, vemos que de fato D_0^u e D_0^s são gráficos de funções com constante de Lipschitz menor ou igual a γ e portanto a interseção desses graáfico é um único ponto que denotamos por y. Note que como $y \in D_0^s$ então para frente ele ϵ-sombreia $\{x_n\}$, analogamente para o passado.

Se $\{x_n\}$ for periódico de período l, então como $\{f^n(y)\}$ e $\{f^n(f^l(y))\}$ ϵ-sombreia $\{x_n\}$, por unicidade $y = f^l(y)$. Para conjunto hiperbólico maximal, y permanece sempre dentro de uma vizinhança pequena de Λ logo está em Λ. $\square$

Se Λ não for isolado, é possível que y não pertença a Λ. Para isso basta considerar um conjunto minimal não trivial. De fato construimos um tal conjunto na ferradura no Exemplo 5.6.

Corolário 5.1. *Existe uma vizinhança, $\mathcal{V}_f$, de f na topologia C de modo que as constantes do Lema de Sombreamento valem igualmente para toda $g \in \mathcal{V}_f$. Isto é, dado epsilon existem δ e η como no teorema satisfazendo a condição de sombreamento para toda $g \in \mathcal{V}_f$.*

Demonstração. Segue da demonstração, olhando que basta tomar $\mathcal{V}_f$ para que sejam satisfeitas as mesmas condições que a f. $\square$

Corolário 5.2. *Λ hiperbólico, então $f|\Lambda$ é expansivo*

Demonstração. Utilizando o lema de sombreamento, seja ϵ qualquer. Defina $\widetilde{\delta} = min\{\delta, \epsilon\}$, vejamos que esta é a constante de expansividade. Onde δ é dado pelo lema de sombreamento. Por absurdo, suponha $x \neq y$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) < \widetilde{\delta}$, como $\{f^n(y)\}$ é δ-pseudo órbita existe único que a ϵ acompanha. Logo $x = y$. $\square$

O Teorema 5.1 é de fato um dos mais importante na teoria. Ele será usado durante todo o texto. Daremos agora algumas aplicacões que decorrem do Lema de Sombreamento.

Proposição 5.1. *Se Λ é hiperbólico isolado, então $\overline{Perf|_\Lambda} = \Omega(f|_\Lambda)$.*

Demonstração. Já sabemos que $\overline{Perf|_\Lambda} \subset \Omega(f|_\Lambda)$.

Seja $x \in \Omega(f|_\Lambda)$. Dado $\epsilon_0 > 0$ quero achar um ponto periódico ϵ_0 perto de x. Do lema de sombreamento tome $\epsilon = \epsilon_0/2$, existe portanto o δ. Considere a bola B de raio $r < min\{\epsilon, \delta/2\}$ centrada em x. Como x é não errante, existe um iterado $k \in \mathbb{N}$ de algum $y \in B$ tal que $f^k(y) \in B$. Completamos esta sequência para obter a seguinte δ-pseudo periódica órbita:

$$\{\ldots, f^k(y), y, f(y), f^2(y), \ldots, f^k(y), y, \ldots\}$$

e pelo lema de sombreamento existe $y_0 \in \Lambda$ (aqui usamos Λ isolado) que ϵ-sombreia e é periódico. Das escolhas feitas, segue que

$$d(y_0, x) < d(y_0, y) + d(y, x) < \epsilon + r < \epsilon_0/2 + \epsilon_0/2$$

Concluimos que y é o ponto periódico procurado. □

Definição 5.2. Dizemos que um ponto q é homoclínico com relação ao ponto p se $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$. Se em q a interseção for tranversal então q é um ponto homoclínico transversal.

Teorema 5.3. *Todo ponto homoclínico transversal é acumulado por pontos periódicos.*

Demonstração. Seja $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$ um ponto de intersecção transversal. Podemos supor p ponto fixo. Defina o conjunto

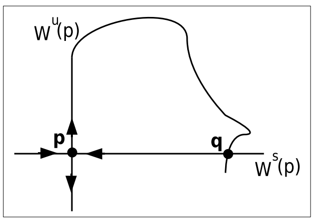
$$\Lambda = \{p\} \cup \mathcal{O}(q)$$

Λ é fechado invariante. Para usar o lema de sombreamento queremos olhá-lo como um conjunto hiperbólico. Precisamos encontrar a decomposição nos subespaçoes invariantes contrativos e expansivos. Definimos $E^s(q)$ como sendo o espaço tangente a variedade estável de q, analogamente $E^u(q)$, $E^s(q)$, $E^u(q)$. Para os outros pontos definimos $E^s(f^n(q)) = df^n_q(E^s(q)$ analogamente para a variedade instável. Podemos assim utilizar o lema de sombreamento para Λ.

Dado ϵ_0 queremos achar um ponto periódico ϵ_0 próximo de q. Tome no lema de sombreamento $\epsilon = \epsilon$, e seja δ o delta para pseudo-órbita. Como $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$ podemos tomar para k suficientemente grandes a seguinte δ-pseudo periódica órbita.

$$\{\ldots, f^k(q), f^{-k}(q), \ldots, f^{-1}(q), q, f(q), \ldots, f^k(q), f^{-k}(q), \ldots\}$$

Existe portanto y_0 periódico que ϵ aproxima esta pseudo-órbita. Portanto existe uma ponto periódico ϵ próximo de q.



□

Definição 5.4. Definimos os conjuntos estáveis e instáveis para um subconjunto $A \subset M$ respectivamente por

- $W^s(A) = \{y \in M \mid d(f^n(y), f^n(A)) \to 0 \text{ quando } n \to \infty\}$;
- $W^u(A) = \{y \in M \mid d(f^n(y), f^n(A)) \to 0 \text{ quando } n \to -\infty\}$.

Proposição 5.2. *Seja Λ hiperbólico maximal. Então*

$$W^s(\Lambda) = \bigcup_{x\in\Lambda} W^s(x), \quad W^u(\Lambda) = \bigcup_{x\in\Lambda} W^u(x)$$

Demonstração. Sendo Λ compacto, existe $\epsilon_0 > 0$ uniforme de modo que um ponto que ϵ_0-acompanha um outro deve estar na sua variedade estável. Existe também $L_0 > 0$ tal que para pontos x, y δ_0-próximos em M temos $d(f(x), f(y)) < L_0 d(x, y)$.

Uma inclusão é fácil, provemos a outra. Seja $y \in W^s(\Lambda)$, do lema de sombreamento tome $\epsilon = \epsilon_0/2$, o que nos fornece um δ. Seja N_0 grande o suficiente para que, se $n \geq N_0$ então

$$d(f^n(y), \Lambda) < \overline{\delta},\ n \geq N_0 \ ;\ \overline{\delta} := min\{\delta, (\epsilon_0/2)(1/(1+L_0)\}$$

Existem $x_n \in \Lambda$ com $d(x_n, f^n(y)) < \overline{\delta}$ para $n \geq N_0$. Queremos encontrar uma δ-pseudo órbita. Para $n \geq N_0$ tomemos x_n para $n < N_0$ definimos $x_j = f^{-N_0+j}(x_{N_0})$.

Afirmação: $\{x_n\}$ é uma δ-pseudo órbita.

Basta checarmos para $n \geq N_0$ pois para trás temos uma órbita.

$$d(x_{n+1}, f(x_n)) \leq d(x_{n+1}, f^{n+1}(y)) + d(f^{n+1}(y), f(x_n)) \leq \overline{\delta} + L_0 d(f^n(y), x_n)$$
$$\leq \overline{\delta} + L\overline{\delta} = \overline{\delta}(1+L) < \epsilon_0/2$$

Provando assim a afirmação. E portanto existe um $y_0 \in \Lambda$ (aqui usamos que é isolado) que ϵ sombreia esta pseudo órbita.

Note que para $n \geq N_0$

$$d(f^n(y), f^n(y_0)) \leq d(f^n(y), x_n) + d(x_n, f^n(y_0)) \leq \overline{\delta} + \epsilon_0/2 \leq \epsilon_0/2 + \epsilon_0/2 = \epsilon_0$$

Então $f^{N_0}(y) \in W^s_{loc}(f^{N_0}(y_0))$, concluimos assim que $y \in W^s(y_0)$. $\square$

Exemplo 5.5. Construamos um exemplo em que Λ seja hiperbólico, mas $W^s(\Lambda) \neq \bigcup_{x\in\Lambda} W^s(x)$.

Olhando para a ferradura, sob o ponto de vista da dinâmica simbólica definimos Λ como sendo o conjuntos das sequências $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de zero e um com a propriedade que os zeros aparecem apenas em blocos (não necessariamente finito) de tamanho par. Tome $x_0 = (\ldots 11.0100010000100000001\ldots)$, aparece um 0 seguido de um 1 depois três zeros seguido de 1, cinco zeros seguido de 1, e assim por diantes. Acrescentando sempre uma quantidade ímpar de zeros.

É fácil ver que $x_0 \in W^s(\Lambda)$, já que no iterado $\sigma^n(x_0)$ sempre achamos um elemento de Λ que coincida com x_0 em torno (centrado na posição zero) das $n-2$ coordenadas. Mas não existe $p \in \Lambda$ tal que $x_0 \in W^s(p)$ pois se isso acontecesse x_0 e p coincidiriam as entradas a partir de um momento, o que não pode ocorrer.

Exemplo 5.6. *Existe minimal não trivial (i.e. não é órbita de um ponto periódico), na ferradura.*

Pegue R_α uma rotação irracional em S^1. Seja $x_0 \in S^1$, tome $x_1 = f(x_0)$ e $y_0 = f(x_1)$. Sejam I_0, I_1 abertos conexos tais que $S^1 \backslash \{x_0, x_1\} = I_0 \cup I_1$. Defina $\theta(n)$ para $n \geq 0$ por $f^n(y_0) \in I_{\theta(n)}$. Por fim, defina $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ por $\eta(n) = \theta(|n|)$.

Vejamos que $\omega(\eta)$ não contém pontos periódicos. Por absurdo, suponha que exista sequência de naturais $n_i \to \infty$ tais que $d(\sigma^{n_i}(\eta), p) \to 0$. Onde σ é a função shift e p um ponto periódico. Seja k o período do ponto p. A rotação irracional $R_{k\alpha}$ tem a propriedade: existe n_0 tal que para todo ponto $x \in S^1$ o conjunto $\{R^n_{k\alpha}(x)\}_{n=0}^{n_0}$ possui elementos em I_0 e em I_1. (Para provar esta afirmação basta ver que vale pontualmente, pois a rotação é transitiva, então vale localmente e usa o fato que S^1 é compacto.)

Mas $d(\sigma^{n_i}(\eta), p) \to 0$ implica que podemos achar iterados consecutivos que caiam dentro de I_0 (ou I_1). Ou seja,

$$R^{l_0}_\alpha(y_0), R^{l_0+k}_\alpha(y_0), R^{l_0+2k}_\alpha(y_0), \ldots, R^{l_0+mk}_\alpha(y_0) \in I_0$$

por conseguinte,

$$R^{l_0}_\alpha(y_0), R_{k\alpha}(R^{l_0}_\alpha(y_0)), R^2_{k\alpha}(R^{l_0}_\alpha(y_0)), \ldots, R^m_{k\alpha}(R^{l_0}_\alpha(y_0)) \in I_0$$

O que é um aburdo pela propriedade de $R_{k\alpha}$ comentada anteriormente.

Concluimos que $\omega(x)$ não contém pontos periódicos e possui, pela Proposisão 2.4, um minimal que, portanto, não é trivial.

5.2 Conjunto Hiperbólico Maximal

Vimos na seção 3 a definição de conjunto hiperbólico isolado, obteremos agora alguns resultados relativo ao mesmo.

Observação 5.1. Todd Fisher [4] mostrou que existem conjuntos hiperbólicos que não estão contidos em nenhum conjunto hiperbólico maximal. De fato é possível mostrar que este exemplo é robusto e pode ser construído em qualquer variedade de dimensão maior ou igual a dois.

Teorema 5.7. *Se Λ é um conjunto hiperbólico isolado para f, então existem vizinhanças $\mathcal{U}$ de Λ e $\mathcal{U}_f$ de f; tal que: se $g \in \mathcal{U}_f$, então*

$$\Lambda_g := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(\overline{U})$$

é hiperbólico isolado para g.

[4] Todd Fisher, Hyperbolic sets that are not locally maximal, *Ergodic Theory Dynam Systems 26, 2006.*

Demonstração. Vejamos como escolher as vizinhanças do enunciado. Considere $\mathcal{U}$ uma vizinhança de isolamento de Λ para f, podemos tomas esta vizinhança menos, se necessário, de forma que esteja dentro da vizinhança fornecida pelo Lema de Sombreamento (Teorema 5.1). Dado $\epsilon = \frac{1}{2}d(\Lambda, \partial\mathcal{U})$, o Lema de Sombreamento fornece um δ. Tomemos a vizinhança $\mathcal{U}_f$ pequena o suficiente (uma δ-vizinhança por exemplo) para que $\forall x \in M$, $\{g^n(x)\}$ seja uma δ-pseudo órbita para f.

Com isso vejamos que Λ_g é hiperbólico isolado. Basta provarmos que $\Lambda_g \subset \mathcal{U}$. Suponha por absurdo que exista $x \in \Lambda_g \cap \partial\mathcal{U}$. Como $g^n(x)$ é uma δ-pseudo órbita para f, existe $y \in \Lambda_f$. Mas este ponto, $y \in \Lambda$, estaria fora de Λ. Absurdo.

Sabemos que podemos tomar a vizinhancça $\mathcal{U}_f$ pequena o suficiente para que Λ seja de fato um conjunto hiperbólico (usando cones invariantes). Por fim, usando que $\Omega(f|_\Lambda) = \overline{Per(f|_\Lambda)}$ implica que existe um ponto hiperbólico periódico, que é mantido por perturbações. O que implica que $\Lambda_g \neq \emptyset$ para perturbações próximas de f. $\square$

Lema 5.1. *Seja $f : M \to M$, δ-expansiva. Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $d(f^n(x), f^n(y)) < \delta$ para todo $|n| < N$, então $d(x, y) < \epsilon$.*

Demonstração. Por contradição suponha $d(f^n(x), f^n(y)) < \delta$ para todo n com $d(x, y) > \epsilon$. Então por expansividade $x = y$, absurdo. $\square$

Teorema 5.8. *(Estabilidade de Conjunto Hiperbólico Isolado) Seja Λ_f hiperbólico isolado para $f : M \to M$. Então existem vizinhanças $\mathcal{U}$ de Λ_f e $\mathcal{V}_f$ de f na topologia C^1 tal que $\Lambda_g = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(\overline{U})$ é conjugado a Λ_f. Isto é, existe homeomorfismo $h : \Lambda_f \to \Lambda_g$ fazendo o diagrama abaixo comutar*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_f & \xrightarrow{f} & \Lambda_f \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \Lambda_g & \xrightarrow{g} & \Lambda_g \end{array}$$

Demonstração. Para vizinhanças pequenas o suficiente em torno de f temos que Λ_g é não vazio. De fato, como

$$\overline{Per(f_{|\Lambda_f})} = \Omega(f_{|\Lambda_f})$$

temos pontos periódicos hiperbólicos e que são mantidos por perturbações. Portanto Λ_g é não vazio.

Encontremos a função h. Tome $\epsilon < \delta_0/3$, onde δ_0 é a constante de expansividade de f. Para este ϵ seja δ dado pelo lema de sombreamento. Com isso considere uma δ-vizinhança, $\mathcal{V}_f$, de f na topologia C^1 e pequena o suficiente para que $\Lambda_g \neq \emptyset$. Isto quer dizer que se $g \in \mathcal{V}_f$, então para $x \in \Lambda_f$ temos que $\{f^n(x)\}$ é uma δ-pseudo órbita para g:

$$d(g(f^{n-1}(x)), f^n(x)) = d(g(f^{n-1}(x)), f(f^{n-1}(x)) < \delta$$

Definimos a função

$$\begin{aligned} h : \Lambda_f &\rightarrow \Lambda_g \\ x &\mapsto h(x) \end{aligned}$$

onde $h(x)$ é um ponto que ϵ-sombreia $\{f^n(x)\}$.

Devido ao Corolário 5.1, podemos definir a inversa de h analogamente a definição de h.

Provaremos que h^{-1} é contínua. O que implica que h é homeomorfismo, dado que uma bijeção contínua em um compacto é um homeomorfismo.

Dado $\widetilde{\epsilon} > 0$, seja $N = N(\widetilde{\epsilon})$ proveniente do lema acima para $\widetilde{\epsilon}$ e f. Tome $\widetilde{\delta}$ tal que se $d(x,y) < \widetilde{\delta}$, então $d(g^n(x), g^n(y)) < \delta/3$ para $|n| < N$.

$$\begin{aligned} d(f^n(h^{-1}(x)), f^n(h^{-1}(y)) &\leq d(f^n(h^{-1}(x)), g^n(x)) + d(g^n(x), g^n(y)) \\ &+ d(g^n(y), f^n(h^{-1}(y)) < \widetilde{\delta}/3 + \widetilde{\delta}/3 + \widetilde{\delta}/3 \\ &= \widetilde{\delta} \end{aligned}$$

usamos que $d(g^n(x), f^n(h^{-1}(x))$ e $d(g^n(y), f^n(h^{-1}(y)))$ são menores que $\widetilde{\delta}/3$ pois como definimos acima $\{f^n(h^{-1}(x))\}$ ϵ-sombreia $\{g^n(x)\}$. Portanto $d(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) < \widetilde{\epsilon}$

Logo h é um homeomorfismo. Por fim note que h é a conjugação entre Λ_f e Λ_g, dado que por definição $h \circ f = g \circ h$. □

Observação 5.2. A conjugação h construída no teorema acima é Hölder contínua. Vale em geral, qualquer conjugação entre conjuntos hiperbólico é Hölder contínua. (Vide Teorema 19.1.2. em [5].)

5.2.1 Estrutura de Produto Local

Uma maneira equivalente de se definir conjunto hiperbólico maximal é dizer que este possui estrutura de produto local.

Definição 5.9. Dizemos que um conjunto hiperbólico Λ tem *estrutura de produto local* (E.P.L.) se:

Existem $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in \Lambda$ satisfazendo $d(x,y) < \delta$, então

$$[x,y] := W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y)$$

é um único ponto e este ponto está em Λ.

Teorema 5.10 (Sombreamento com E.P.L.)**.** *Seja f um difeomorfismo e Λ um conjunto hiperbólico com estrutura de produto local (E.P.L.).*

- *Então para todo $\beta > 0$, existe um $\alpha > 0$ tal que toda α-pseudo-órbita $\underline{x} = \{x_n\} \subset \Lambda$ é β-sombreada por um ponto $y \in \Lambda$.*

E mais, se $\beta < \delta/2$ onde δ é a constante de expansividade de f e $\underline{x}$ é bi-infinita, então y é único.

Demonstração. É dado $\beta > 0$. Usando a propriedade de produto local, sabemos que existe ϵ, δ tal que se $d(x,y) < \delta$ então $[x,y] = [x,y]_{\epsilon,\delta} = W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y)$ é um único ponto e que está em Λ. Tomamos ϵ, δ menores, se necessário, de forma que

$$\frac{\epsilon}{(1-\lambda)} < \beta/2.$$

Em particular, $\epsilon < \beta/2$. Sejam λ e C da definição de conjunto hiperbólico, vimos que podemos supor $C = 1$. Lembre que $\lambda < 1$.

Agora definimos α da seguinte maneira: α é um número positivo menor que δ tal que se $d(z,w) < \alpha$, então

$$[z, W^s_{\lambda\epsilon}(w) \cap \Lambda] \subset W^s_\epsilon(z)$$

Seja $\underline{x} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ uma α-pseudo-órbita finita em Λ. Defina $y_0 = x_0$. Note que $y_1 = [x_1, f(y_0)]$ está bem defindo por ser $\underline{x}$ uma α-pseudo-órbita. Definimos y_k por

$$y_k = [x_k, f(y_{k-1})], \forall n \in \{1, \ldots, n\}$$

De fato precisamos ver que y_k está bem definida. A prova é por indução, vimos que para $k = 1$ é verdade. Aplicando a hipótese de indução $y_k \in W^s_\epsilon(x_k) \cap \Lambda$, então $f(y_k) \in W^s_{\lambda\epsilon}(f(x_k))$ e pela definição de α isto implica que y_{k+1} está bem definida.

Note que $y_k \in W^u_\epsilon(f(y_{k-1}))$, assim $f^{-j}(y_k) \in W^u_{\theta_j}(y_{k-j})$, onde $\theta_j = \sum_{i=1}^{j} \lambda^i \epsilon < \gamma := \epsilon/(1-\lambda)$. Vejamos que o ponto $y = f^{-n}(y_n)$ β-sombreia $\underline{x}$. Como $f^{-(n-j)}(y_n) = f^j(y) \in W^u_\gamma(y_j)$ temos

$$d(f^j(y), x_j) \leq d(f^j(y), y_j) + d(y_j, x_j) \leq \gamma + \epsilon < \beta.$$

Por fim, se $\underline{x}$ for infinito achamos um ponto z_n que β-sombreia $\underline{x}_n = \{x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. E tomando um ponto de acumulação de $\{z_n\}$ obtemos um ponto em Λ que β-sobreia $\underline{x}$.

Para a última parte, suponha que tenhamos dois pontos y_1, y_2 que β-sombream, então

$$d(f^n(y_1), f^n(y_2)) \leq d(f^n(y_1), x_n) + d(x_n, f^n(y_2)) \leq \beta, \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Portanto, $y_1 = y_2$. □

Teorema 5.11. *Seja f um difeomorfismo. Um conjunto hiperbólico Λ é isolado se, e somente se, Λ tem estrutura de produto local.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$: Como Λ é hiperbólico compacto, sabemos que existem $\delta_0, \epsilon_0 > 0$ tais que se $d(x,y) < \epsilon_0$ então $[x,y] = W^s_{\epsilon_0}(x) \cap W^u_{\epsilon_0}(y)$ é constituído de exatamente um ponto. Sendo Λ hiperbólico, sejam ϵ, δ tal que numa δ vizinhança de Λ toda δ pseudo-órbita nesta vizinhança é ϵ-sombreada por algum ponto de Λ. Queremos checar que $z = [x,y] \in \Lambda$, mas por um lado $d(f^n(x), f^n(z)), d(f^{-n}(y), f^{-n}(z)) < \epsilon_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, como podemos tomar esses ϵ e δ tão pequenos quanto quisermos, $d(f^n(z), \Lambda) < \epsilon$ e sendo $\{f^n(z)\}$ uma δ-pseudo-órbita existe um único conjunto cujo a órbita o ϵ sombreia, logo este ponto deve ser o próprio z e deve estar em Λ já que Λ é isolado.

$(\Leftarrow)$: Considere $\mathcal{V}$ uma vizinhança de Λ a qual estendemos os cones invariantes de forma que $\Lambda_{\mathcal{V}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(\mathcal{V})$ seja hiperbólico. Chamemos de δ a constante de expansividade deste conjunto hiperbólico. Sendo Λ hiperbólico com E.P.L. considere ϵ, δ fazendo o papel de α, β na Proposição 5.10. Tomemos $\overline{\delta}$ tal que $d(f(x), f(y)) < \delta/2$ se $d(x,y) < \overline{\delta}$ (por compacidade f é uniformemente contínua) e $\overline{\delta} < \delta/2$. Denotando $\mathcal{U}_{\overline{\delta}}$ a $\overline{\delta}$-vizinhança de Λ provemos que

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\mathcal{U}_{\overline{\delta}}).$$

O número $\overline{\delta}$ é escolhido pequeno o suficiente para que $\mathcal{U}_{\overline{\delta}} \subset \mathcal{V}$ e ϵ pequeno para que tenhamos unicidade no sombreamento com E.P.L. assim como $\epsilon < \delta/2$. Seja $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\mathcal{U}_{\overline{\delta}})$, então $f^n(z) \in \mathcal{U}_{\overline{\delta}}, \forall n \in \mathbb{N}$. Para todo n natural considere $x_n \in \Lambda$ tal que $d(f^n(z), x_n) < \overline{\delta}$. Observe que $\{x_n\}$ é uma δ-pseudo-órbita

$$d(f(x_n), x_{n+1}) \leq d(f(x_n), f(f^n(z))) + d(f^{n+1}(x_n), x_{n+1}) \leq \delta/2 + \delta/2 = \delta$$

A Proposição 5.10 diz que existe um ponto $y \in \Lambda$ que ϵ sombreia. Para todo inteiro n

$$d(f^n(z), f^n(y)) \leq d(f^n(z), x_n) + d(x_n, f^n(y)) \leq \delta/2 + \delta/2 = \delta.$$

Por expansividade do hiperbólico $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\mathcal{V})$, então $z = y \in \Lambda$.

□

Exemplo 5.12. Em particular o conjunto $\Lambda = \{p\} \cup \mathcal{O}(q)$, construído no Teorema 5.3 não é isolado, pois não tem estrutura de produto local. Para ver que não tem E.P.L. olhe em torno do ponto p.

5.3 Lambda-Lema

A seguir o Lambda-Lema, também conhecido como Lema da Inclinação.

Teorema 5.13 (Lambda Lema)**.** *Seja $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico para o difeomorfismo $f \in Diff^1(M)$. Se D é um disco transversal a variedade* *estável, $W^s(p)$, em um ponto $q \in W^s(p)$, então dado R e ϵ reais positivos existe N_0 tal que $\forall n \geq N_0$ a componente conexa de $f^n(D) \cap \mathcal{V}_\epsilon(W^u_R(p))$ que contém $f^n(p)$ está ϵ-C^1 próximo de $W^u_R(p)$. Onde $W^u_R(p)$ é a variedade instável de p de raio R e $\mathcal{V}_\epsilon(W^u_R(p))$ é uma vizinhança de distância ϵ de $W^u_R(p)$.*

Demonstração. Primeiramente observamos que o resultado vale se provarmos o teorema em uma vizinhança de p. Por isso olharemos f em coordenadas e tomaremos coordenadas C^1 tais que as variedades estáveis e instáveis de $p = 0$ são os eixos coordenados.

$\mathbb{R}^k \times \{0\} = W^u(0)$ e $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k} = W^s(0)$.

Para uma vizinhança suficientemente pequena, assim como δ pequeno temos

$$Df_z = \begin{pmatrix} A^{uu}_z & A^u_z \\ B^s_z & B^{ss}_z \end{pmatrix}$$

Com $||(A^{uu}_z)^{-1}|| < 1/(\mu)$, $||B^{ss}_z|| < \lambda$ e $||A^u_z||, ||B^s_z|| < \delta$.

Seja $z \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-k} = W^s(0)$ o ponto q do disco D olhado em coordenadas, note que neste caso como f deixa $W^s(0)$ invariante, então $A^u_z = 0$. Seja $E_z : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ uma transformação linear cujo gráfico seja igual a T_zD. Olhemos para a imagem T_zD pela Df,

$$Df_z \begin{pmatrix} I \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{uu}_z \\ B^s_z + B^{ss}_z E_z \end{pmatrix}$$

Todavia como estamos interessado na imagem, podemos olhar para a transformação linear dada por

$$E_{z_1} = B^{ss}_z E_z (A^{uu}_z)^{-1} + B^s_z (A^{uu}_z)^{-1}$$

onde $z_1 = f(z)$.

$$||E_{z_1}|| \leq ||B^{ss}_z E_z (A^{uu}_z)^{-1}|| + ||B^s_z (A^{uu}_z)^{-1}|| \leq 1/\mu ||B^s_z|| + \lambda/\mu ||E_z||$$

Definimos $z_n = f^n(z)$, por indução vemos que

$$||E_{z_n}|| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda)^{n-j-1}}{(\mu)^{n-j}} ||B^s_{z_j}|| + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n ||E_{z_0}||$$

Para n grande, podemos controlar o somatário pois $||B^s_{z_j}||$ é bem pequeno quando j é grande e $\lambda/\mu < 1$.

$$\begin{aligned} ||(B^s_z + B^{ss}_z E_z) \circ (A^{uu}_z + A^u_z E_z)^{-1}|| &\leq ||(B^s_z + B^{ss}_z E_z)|| 1/\mu \\ &\leq (||B^s_z|| + \lambda ||E_z||) 1/\mu \end{aligned}$$

E $(||B_z^s|| + \lambda||E_z||)1/\mu < \epsilon$ caso estejamos em uma vizinhança sufucientemente próxima de $\mathbb{R}^k \times \{0\}$, já que $B_z^s = 0$ em $\mathbb{R}^k \times \{0\}$.

$\square$

Exercícios

Exercício 5.1. Mostre que se Λ é hiperbólico, então a decomposição $T_xM = E^s \oplus E^u$ é única.

Exercício 5.2. Λ hiperbólico transitivo onde $T_xM = E^s$ $x \in \Lambda$, então Λ é uma órbita periódica.

Exercício 5.3. Dê exemplos onde:

- $\Omega(f_{|\Omega}) \neq \Omega(f)$;
- $\overline{Perf_{|\Lambda}} \neq \Omega(f_{|\Lambda})$.

Exercício 5.4 (Estabilidade estrutural de conjunto hiperbólico)**.** Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e Λ um conjunto hiperbólico, não necessariamente isolado.

a) Existe cones invariantes em torno de Λ;

b) Existe ponto periódico hiperbólido, para f, em toda vizinhança de Λ;

c) Existe vizinhança $\mathcal{U}$ de Λ e $\mathcal{V}_f$ de f na topologia C^1 tal que

$$\Lambda_g := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(\overline{\mathcal{U}}) \neq \emptyset, \ \forall g \in \mathcal{V}_f;$$

d) Construa a conjugação $h : \Lambda_f \to \Lambda_g$.

Portanto, o resultado do Teorema 5.8 é igualmente válido mesmo no caso em que Λ não seja isolado.

Exercício 5.5. Seja $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ a função altura no toro, olhe o fluxo Hamiltoniano e chame de f o fluxo em tempo $t = 1$. Prove que para toda vizinhança $\mathcal{V} \subset Diff^1(\mathbb{T}^2)$ de f, existe um aberto $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ tal que $\forall g \in \mathcal{U}$ tem infinitos pontos periódicos.

Exercício 5.6. Seja Λ um conjunto hiperbólico qualquer, então $\Omega(f|_\Lambda) \subset \overline{Per(f)}$.

Exercício 5.7. Faça uma demonstração do Lema de sombreamento inspirada na demonstração do Teorema 5.10.

6 Kupka-Smale

Gostaríamos de entender, e se possível, classificar todos os difeomorfismo. Infelizmente o sonho de encontrar um aberto e denso de conjuntos estruturalmente estáveis não se tornou realidade, falaremos sobre isso na seção 7. Podemos entretanto encontrar uma quantidade muito grande de um tipo específico de difeomorfismos, conhecidos como Kupka-Smale. Em seguida veremos os Morse-Smale, que foram uma primeira tentativa de encontrar o tal conjunto aberto e denso de difeomorfismos estruturalmente estáveis.

Definição 6.1. Um difeomorfismo é dito *Kupka-Smale* se todos os pontos periódicos são hiperbólicos e as variedade estáveis e instáveis, desses pontos, se instersectam transversalmente (para qualquer ponto da interseção).

Teorema 6.2 (Kupka-Smale)**.** *O conjunto dos difeomorfismos $Kupka-Smale$ de classe C^1 é residual em $Diff^1(M)$. Em particular é denso.*

Demonstração. Definamos o conjunto

$$\begin{aligned} KS(n) = \{f \in Diff^1(M) \quad | \quad & Per(f,n) \text{ é hiperbólico e} \\ & W^s_n(f,p) \pitchfork W^u_n(f,p),\ \forall p,q \in Per(f,n)\} \end{aligned}$$

Vemos que o conjunto dos difeomorfismos Kupka-Smale é

$$KS = \bigcap_{n \geq 0} KS(n)$$

O resultado seguirá, portanto, se provarmos que $KS(n)$ é aberto e denso.

Abertura: Vemos facilmente que $KS(n)$ é aberto, dado que temos finitos pontos periódicos de ordem menor ou igual a n, assim como finitos pontos de interseção das variedades de tamanho n. Logo por uma pequena perturbação todos os pontos perióços continuam hiperbólicos e as interseções transversais persistem. A única observação é que fazemos a perturbação fina o suficiente para não criarmos interseções.

Densidade: Conside o conjunto

$$\begin{aligned} D_n = \{f \in Diff^1(M) \quad | \quad & Per(f,n) \text{ hiperbólico e} \\ & W^s(f,p) \pitchfork W^u(f,p),\ \forall p,q \in Per(f,n)\} \end{aligned}$$

Tem-se $D_n \subset KS(n)$. Se D_n é denso, então $KS(n)$ também o é. O difeomorfismo preserva as tranversalidades, assim

$$W^s(f,p) \pitchfork W^u(f,p) \Longleftrightarrow W^s_{loc}(f,p) \pitchfork W^u(f,p).$$

Defina

$$\begin{aligned} D_{n,m} = \{f \in Diff^1(M) \quad | \quad & Per(f,n) \text{ hiperbólico e} \\ & W^s(f,p) \overline{\pitchfork} f^i(W^u_{loc}(f,p)), \\ & \forall p,q \in Per(f,n),\ 0 \leq i \leq m\} \end{aligned}$$

$D_{n,0}$ é denso. Dado f podemos aproximar por g com $Per(g,n)$ hiperbólico. Agora o resultado segue por indução. Dado f, aproxima por $g \in D_{n,m-1}$ e faz uma modificação em g para que pertença a $D_{n,m}$.

E segue o resultado. □

Proposição 6.1. *Suponha M uma superfície, i.e. dimensão dois. Na topologia C^1, se f é estruturalmente estável então é Kupka-Smale.*

Demonstração. Provemos por absurdo. Seja f seja estruturalmente estável e não seja Kupka-Smale.

Primeiro, suponha que exista ponto periódico p, digamos de período k, que não seja hiperbólico. Considere uma vizinhança de f $\mathcal{V} = \mathcal{V}_f$, onde duas quaisquer funções são conjugadas. Considere uma g KS em $\mathcal{V}$. Logo como f é conjugada a g, f tem quantidade finita de pontos periódicos de período k. Sejam $\{q_1, \ldots, q_r\}$ esses pontos periódicos. Fazendo perturbações (como no Teorema 6.2) perturbamos os pontos $q_1, \ldots, q_{r-1}$ para que sejam hiperbólicos. Chame esta nova função de $\widetilde{f}$. Sabemos que $\widetilde{f}$ e g são conjugadas. Acontece que o último ponto q_r podemos perturbar de modo a criar expansão ou contração no subespaço que tem o autovalor tem norma 1. Logo não pode ser conjugado a g. Absurdo.

No segundo caso supondo que existe um ponto de tangência. Podemos perturbar para achar uma tangência que toque numa quantidade não enumerável de pontos (aqui usamos aproximação C^1). Mas KS tem quantidade enumerável de tangêncial. Absurdo. □

Observação 6.1. Clark Robison [5] mostrou que o resultado acima vale na topologia C^r e M uma variedade qualquer.

Exemplo 6.3. *Kupka-Smale não é denso no conjunto dos difeomorfismo que preservam volume.*

Para dar um exemplo consideramos $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e o difeomorfismo induzido no toro por A (já que A possui entradas inteiras). Este difeomorfismo preserva a medida de lebesgue e possui auto-valores $\pm i$ logo não é possível ter Kupka-Smale f perto de A preservando volume já que os auto-valores de f seriam conjugados e portanto teriam norma maior ou menor que 1 e portanto não poderiam preservar a medida de lebesgue.

[5] Clark Robinson, C^r structural stability implies Kupka-Smale, *Dynamical Systems,* ***1973.***

6.1 Morse-Smale

Um resultado devido a Peixoto, mostrou que pelo menos no círculo podemos encontrar um aberto e denso de estruturalmente estáveis. Sendo estes os difeomorfismos Morse-Smale.

Definição 6.4. Dizemos que um difeomorfismo $f : M \to M$ é *Morse-Smale* se

- $\Omega(f) = Per(f)$ hiperbólico e finito;
- $W^s(p) \overline{\pitchfork} W^u(q),\ \forall p, q \in \Omega(f)$.

O próximo resultado fornece que os difeomorfismos de Morse-Smale formam um conjunto aberto e dense, além de serem estruturalmente estáveis, quando $M = S^1$.

Teorema 6.5. *Seja MS o conjunto dos difeomorfismo de $S^1 \to S^1$ tais que $\Omega(f)$ é finito e os pontos periódicos são hiperbólicos.*

Demonstração. Primeiramente vejamos um closing lema no círculo.

Lema 6.1. *$f \in Diff^1(S^1)$, $p \in \Omega(f)$, então existe g arbitrariamente perto de f tal que $p \in per(g)$.*

Demonstração. Defina a função $f_u(x) = f(x) + \epsilon u \phi(x)$, onde ϕ é uma bump function. Note que $||f - f_u|| \leq \epsilon ||\phi||_1$. A ideia é que, usando o teorema do valor médio, podemos variar u para obter que f_u "feche" no ponto p. □

É fácil ver que é aberto. Vejamos que é denso. Dado um difeomorfismo qualquer, sabemos que existe um ponto $p \in \Omega(f)$. Usando o closing lema, seja g suficientemente perto com p sendo ponto periódico. Agora perturbamos para que esse ponto torne-se hiperbólico. Em seguida por transversalidade (com relação a diagonal) aproximamos por um difemos com quantidade finita de pontos periódicos.

□

Exercícios

Exercício 6.1. Os difeomorfismos Morse-Smale do toro bidimensional não são densos.

7 Ω-Estabilidade

O objetivo desta seção é apresentar os difeomorfismos conhecidos como Axioma A. Antes da sua definição veremos alguns resultados que culminarão com a apresentação dos mesmos. Veremos como estes difeomorfismo estão intimamente ligados com a estabilidade do sistema.

7.1 Decomposição espectral

Boa parte do instrumental desenvolvido até agora se juntarão culminando numa melhor compreensão de conjuntos que carregam hiperbolicidade, em particular os introduzidos no início deste trabalho, os periódicos e não-errantes.

Teorema 7.1. *Sejam $f \in Diff^1(M)$ e $\overline{Per(f)}$ hiperbólico. Então*

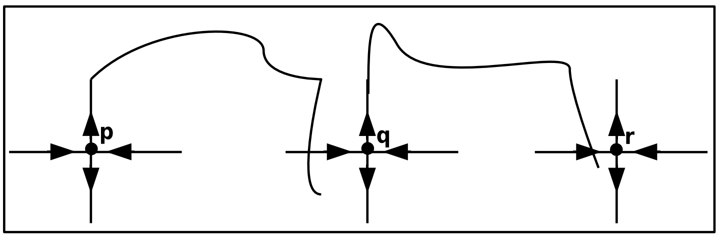
$$\overline{Per(f)} = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_r$$

onde Λ_i são fechados hiperbólicos, com estrutura de produto local, dois a dois disjuntos e $f|_{\Lambda_i}$ é transitiva.

Demonstração. Definimos a seguinte classe de equivalência em $Per(f)$:

Sejam $p, q \in Per(f)$, então $p \sim q$ se, e somente se, $W^u(\mathcal{O}(p))$ tem ponto de intersecção tranversal com $W^s(\mathcal{O}(q))$ e $W^s(\mathcal{O}(p))$ tem ponto de intersecção transversal com $W^u(\mathcal{O}(q))$.

Esta é de fato uma classe de equivalência. Segue do lema de inclinação.



Defino agora $H(p)$ como sendo o fecho da classe de equivalência de $p \in Per(f)$.

Afirmação 1: Se $p, q \in Per(f)$ então $H(p) \cap H(q) = \emptyset$ ou $H(p) = H(q)$.

De fato, se $x \in H(p) \cap H(q)$ usando a continuidade da variedade estável para pontos periódicos $p_1 \in H(p)$ e $p_2 \in H(q)$ suficientemente próximos de x suas variedade estáveis e instáveis se intersectam transversalmente. Logo $p_1 \sim p_2$ e portanto as classes são iguais. $\square$ (Afirmação 1)

Afirmação 2: Existem finitos $H(p)$.

De fato, como $\overline{Per(f)}$ é compacto hiperbólico, existe ϵ tal que se dois pontos estão a uma distância ϵ suas variedades estáveis e instáveis possuem pontos de intersecção transversal. Defina

$$\mathcal{V}_p = \{x \in M \mid d(x, H(p)) < \epsilon/3\}$$

Vejamos que se $H(p) \neq H(q)$, então $\mathcal{V}_p \cap \mathcal{V}_q = \emptyset$. Se $x \in \mathcal{V}_p \cap \mathcal{V}_q$ então existem $p_1 \in H(p)$ e $q_1 \in H(q)$ periódicos com $d(p_1, x), d(q_1, x) < \epsilon/3$ e portanto $d(p_1, q_1) < \epsilon$. O que implica que p_1 e q_1 possuem pontos de interseção transversal das suas variedades estáveis e instáveis de um com relação ao outro, isto é $H(p) = H(q)$ absurdo.

Por fim, $\overline{Per(f)} \subset \bigcup_{p \in Per(f)} \mathcal{V}_p$, por compacidade existem finitos $H(p)$. $\square$ (Afirmação 2)

Afirmação 3: Os $H(p)$ possuem estrutura de produto local.

Demonstremos um resultado mais geral. Provemos que se z pertence a interseção tranversal $W^s(x) \cap W^u(y)$ e w a $W^s(y) \cap W^u(x)$ com $x, y \in H(p)$, então $z, w \in H(p)$. Por continuidade das variedades estáveis/intáveis e como $H(p)$ é fechado, posso me restringir ao caso em que x, y são periódicos. Para isso vejamos que z, w são aproximados por pontos periódicos em $H(p)$. Para isso fazemos o mesmo que fizemos na demonstracção do Teorema 5.3. Exceto que aqui definiremos o nosso conjunto hiperbólico como sendo (suponha x, y pontos fixo)

$$\Lambda = \{p, q\} \cup \mathcal{O}(z) \cup \mathcal{O}(w)$$

pelo lema de sombreameto terei uma órbita periódica perto. No entanto como posso tomar tão próximo quando se queira, essa órbita, por continuidade da variedade estável/instável, deve estar na mesma classe que x e y. Com isso consigo aproximar z, w. $\square$ (Afirmação 3)

Afirmação 4: Os $H(p)$ são transitivos.

De fato, para provar a transitividade basta tomar dois abertos $\mathcal{V}, \mathcal{U}$ de $H(p)$ e provar que existe algum iterado n de f tal que $f^n(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Sejam $p \in \mathcal{U}$ e $q \in \mathcal{V}$ periódicos em $H(p)$. Pelo mesmo argumento feito acima, usando o lema de sombreamento, temos que a intersecção transversal das variedades estáveis e intáveis de um ponto periódico com relação ao outro está no conjunto $H(p)$. Seja $z \in W^s(p) \cap W^u(q)$ um tal ponto, logo $z \in H(p)$. Para n grande temos $f^n(z) \in \mathcal{U}$ e $f^{-n}(z) \in \mathcal{V}$. $\square$ (Afirmação 4)

Por fim, resta observar que tomamos os Λ_i como sendo esses finitos $H(p)$. O que demonstra o teorema.

$\square$

Teorema 7.2 (Decomposição Espectral). *$L(f)$ hiperbólico. Então*

$$L(f) = \bigcup_{i=1}^{k} \Lambda_i$$

onde Λ_i são fechados hiperbólicos maximais e dois a dois disjuntos e $f|_{\Lambda_i}$ é transitiva.

Demonstração. Pelo Teorema 7.1 basta provarmos que $\overline{Per(f)} = L(f)$. Sabemos que $\overline{Per(f)} \subset L(f)$. Resta mostrar a outra inclusão.

Seja $x \in L(f)$, então x é acumulado, digamos, por $x_n \in \omega(y_n)$. Como queremos aproximar x por periódicos basta provar que se $z \in \omega(y)$, então podemos aproximar z por um periódico que está ϵ-próximo de z. Tome $\epsilon = \epsilon_0/2$ no Lema de sombreamento e considere o δ e η dados pelo teorema. Defina a vizinhança

$$\mathcal{V} = \{x \in M \mid d(x, L(f)) < \eta\}$$

Existe n_0 tal que para $n \geq n_0$ $f^n(y) \in \mathcal{V}$, caso contrário teríamos um ponto da órbita de y acumulando fora de $L(f)$, absurdo. Considere dois tempos $n_2 > n_1$ ambos maiores que n_0 e tais que $d(f^{n_1}(y), z), d(f^{n_2}(y), z) < min\{\delta/2, \epsilon_0/2\}$. Assim podemos construir a seguinte δ-pseudo órbita periódica

$$\{\ldots, f^{n_2}(y), f^{n_1}(y), f^{n_1+1}(y), \ldots, f^{n_2-1}(y), f^{n_2}(y), f^{n_1}(y), \ldots\}$$

Portanto existe um ponto periódico y_0 que está ϵ perto de $f^{n_1}(y)$, isto implica que y_0 está ϵ_0 próximo de z. $\square$

7.2 Filtração

Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo. Uma **Filtração** $\mathcal{F}$ de f, é uma sequência encaixada de subvariedades compactas com bordo de codimensão zero tais que

$$\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_k = M;$$

$$f(M_i) \subset Int.M_i, 0 \leq i \leq k.$$

Denotamos $\mathcal{F}^{-1}$ a filtração de f^{-1}, dada por

$$\emptyset = \overline{M - M_k} \subset \overline{M - M_{k-1}} \subset \ldots \subset \overline{M - M_0} = M;$$

$$f^{-1}(\overline{M - M_i}) \subset Int.(\overline{M - M_i}), 0 \leq i \leq k.$$

Dada uma filtração, definimos os seguintes conjuntos compactos invariantes

$$K_i(\mathcal{F}) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i - M_{i-1})$$

Proposição 7.1. *Se $L(f) \subset \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_r$, Λ_i invariantes fechados, então M é a união disjunta*

$$M = \bigcup_{i=1}^{r} W^s(\Lambda_i) = \bigcup_{i=1}^{r} W^u(\Lambda_i)$$

Demonstração. Provamos para as variedade estáveis. Uma inclusão é óbvia. Provemos a outra. Considere vizinhanças U_i de Λ_i de forma que

$$f(U_i) \cap U_j = \emptyset, \ i \neq j.$$

Dado $x \in M$ existe n_0 tal que se $n > n_0$ então $f^n(x) \in \cup U_i$. A propriedade acima implica que todos os iterados grandes devem estar em um único U_{i_0}. Portanto $x \in W^s(\Lambda_{i_0})$. $\square$

Para os Λ_i como no enunciado da proposição acima. Definimos a seguinte relação, $>>$, parcial de ordem

$$\Lambda_i >> \Lambda_j \Longleftrightarrow (W^u(\Lambda_i) - \Lambda_i) \cap (W^s(\Lambda_j) - \Lambda_j) \neq \emptyset$$

Dizemos que existe um r-**ciclo** se acontece

$$\Lambda_{i_1} >> \ldots >> \Lambda_{i_r} = \Lambda_{i_1}$$

No caso em que não temos ciclos, podemos reindexar os índices e obter uma ordem total. Ou seja

$$\Lambda_i >> \Lambda_j \Rightarrow i > j$$

chamamos esta ordenação de **ordem da filtração.**

Para construir uma tal ordenação pegamos todos os Λ_i's tais que não exista nenhum Λ_i que seja menor ($<<$) que eles. Deve existir por não haver ciclo. Esses serão os de menores índices. Agora desconsidere esses Λ_i's e repita o processo. Estes novos devem ser maiores que os anteriores. Repetindo o processo até obter a ordem da filtração.

Teorema 7.3. *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo tal que $L(f) \subset \Lambda = \Lambda_i \cup \ldots \cup \Lambda_r$, Λ_i's fechados e invariantes. Então*

$$\Lambda_i = K_i(\mathcal{F}), 1 \leq i \leq r, \text{ para alguma filtração } \mathcal{F} \text{ de } f.$$

$$\Updownarrow$$

Λ_i não possuem ciclos e a ordem dos índices é a ordem da filtração.

Demonstração. ($\Downarrow$) Seja $\mathcal{F}$ uma filtração para f. É fácil ver

$$W^u(K_i(\mathcal{F})) \subset M_i \ ; \ W^s(K_i(\mathcal{F})) \subset M - M_{i-1}$$

Isto implica que não podemos ter r-ciclo para $r > 1$, já que não posso ter $K_i(\mathcal{F}) >> \ldots >> K_j(\mathcal{F})$ com $i < j$. Vejamos que não existe 1-ciclo. O fato de W^s e W^u serem invariantes e que $K_i(\mathcal{F}) = \cap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(M_i - M_{i-1})$ implica

$$W^s(K_i(\mathcal{F})) \cap W^u(K_i(\mathcal{F})) = K_i(\mathcal{F})$$

portanto não pode ocorrer $K_i(\mathcal{F}) >> K_i(\mathcal{F})$. $\square$($\Downarrow$)

($\Uparrow$) Necessitaremos para esta implicação de uma série de lemas.

Lema 7.1. *Se* $\overline{W^u(\Lambda_i)} \cap W^u(\Lambda_j) \neq \emptyset \Rightarrow \overline{W^u(\Lambda_i)} \cap \Lambda_j \neq \emptyset$.

Demonstração. Seja $x \in \overline{W^u(\Lambda_i)} \cap W^u(\Lambda_j)$. Como $W^u(\Lambda_i)$ é invariante, tem-se $\overline{W^u(\Lambda_i)}$ invariante.

$$x \in \overline{W^u(\Lambda_i)} \Rightarrow \alpha(x) \subset \overline{W^u(\Lambda_i)}$$

$$x \in W^u(\Lambda_j) \Rightarrow \alpha(x) \subset \Lambda_j$$

Então $\alpha(x) \subset \overline{W^u(\Lambda_i)} \cap \Lambda_j$.

□

Lema 7.2. *Se* $\overline{W^u(\Lambda_i)} \cap \Lambda_j \neq \emptyset, i \neq j \Rightarrow \overline{W^u(\Lambda_i)} \cap (W^s(\Lambda_j) - \Lambda_j) \neq \emptyset$.

Demonstração. Seja $x_0 \in \overline{W^u(\Lambda_i)} \cap \Lambda_j$. Seja U_l uma vizinhança de Λ_l, $l = 1, \ldots, r$, tal que $f(\overline{U}_j) \cap \overline{U}_l = \emptyset, j \neq l$. Existe sequência $x_k \to x_0, k \to \infty$, com $x_k \in W^u(\Lambda_i) \cap U_j$. Considere a sequência $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ onde $n_k \in \mathbb{N}$ é o menor natural com a propriedade: $f^{-n_k}(x_k) \notin U_j$. A sequência n_k vai a infinito e passando a uma subsequência, se necessário, consideramos que $f^{-n_k}(x_k) \to y_0$.

$$y_0 \notin U_j \; ; \; f^m(y_0) \in \overline{U}_j, \; \forall m \geq 1.$$

Como U_j^c é fechado, tem-se $y_0 \notin U_j$. A segunda afirmação segue por continuidade. Por absurdo, caso exista m satisfazendo $f^m(y_0) \notin U_j \Rightarrow f^{-n_k+m}(x_k) = f^m(f^{-n_k}(x_k)) \notin \overline{U}_j$ para k suficientemente grande, o que contradiz a definição de n_k. E pela escolha de U_j, $f(y_0) \in W^s(\Lambda_j) \Rightarrow y_0 \in W^s(\Lambda_j)$.

Portanto $y_0 \in \overline{W^u(\Lambda_i)} \cap (W^s(\Lambda_j) - \Lambda_j)$.

□

Lema 7.3. *Se* $\overline{W^u(\Lambda_i)} \cap \Lambda_j \neq \emptyset, i \neq j \Rightarrow i > j$.

Demonstração. Pelo lema anterior: $\overline{W^u(\Lambda_i)} \cap (W^s(\Lambda_j) - \Lambda_j) \neq \emptyset$. Tome x nesta interseção. Pela Proposição 7.1, existe i_1 tal que $x \in W^u(\Lambda_{i_1})$. Então $i_1 > j$. Então $W^u(\Lambda_{i_1}) \cap \overline{W^u(\Lambda_i)} \neq \emptyset$. Analogamente, tome $x_2 \in \overline{W^u(\Lambda_i)} \cap (W^s(\Lambda_{i_1}) - \Lambda_{i_1}) \Rightarrow x_2 \in W^u(\Lambda_{i_2})$ logo $i_2 > i_1 > j$. Repetindo este argumento e o fato de que não temos ciclos este processo deve chegar em i, isto é $i > \ldots > i_2 > i_1 > j$. □

Lema 7.4.

a) $\overline{W^u(\Lambda_i)} \subset \bigcup_{j \leq i} W^u(\Lambda_j)$;

b) $\bigcup_{j \leq i} W^u(\Lambda_j)$ é fechado.

Demonstração. a) Seja $x \in \overline{W^u(\Lambda_i)}$, então existe j tal que $x \in W^u(\Lambda_j)$. Se $j = i$ ok. No outro caso, os lemas acima implicam que $i > j$.

b) Segue do item a). □

Lema 7.5. $\bigcup_{j\leq i} W^s(\Lambda_j)$ *é vizinhança aberta de* $\bigcup_{j\leq i} W^u(\Lambda_j)$

Demonstração. Note que f^{-1} troca W^s e W^u; a ordem da filtração também troca, então $\bigcup_{j\leq i} W^s(\Lambda_j) = \bigcup_{j>i} W^u_{f^{-1}}(\Lambda_j)$ é aberto já que seu complementar $\bigcup_{j\leq i} W^s_{f^{-1}}(\Lambda_j)$ é fechado pelo lema anterior.

Afirmo que $\bigcup_{j\leq i} W^u(\Lambda_j) \subset \bigcup_{j\leq i} W^s(\Lambda_j)$. De fato, tome $x \in W^u(\Lambda_j) \subset \bigcup_{j\leq i} W^u(\Lambda_j)$. Existe j_0 tal que $x \in W^s(\Lambda_{j_0})$, então $x \in (W^u(\Lambda_j) - \Lambda_j) \cap (W^u(\Lambda_{j_0}) - \Lambda_{j_0})$. Assim $j > j_0$, implicando $x \in \bigcup_{j\leq i} W^s(\Lambda_j)$ □

Lema 7.6. *Sejam X espaço métrico compacto e $f : X \to X$ homeomorfismo com a imagem. Considere dois compactos P, Q com $P \subset Int.Q$ e $P = \cap_{n\geq 0} f^n(Q)$. Se f for aberta em uma vizinhança de P então existe vizinhança compacta $U \subset Q$ de P tal que $f(U) \subset Int.U$.*

Não provaremos o lema topológico acima. Terminemos a prova do Teorema.

Queremos construir a filtração. Temos $\Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_r$. Definimos $M_r = M$. Vejamos como encontamos M_{r-1}. Vimos acima que $W^s(\Lambda_1) \cup \ldots \cup W^s(\Lambda_{r-1})$ é uma vizinhança aberta de $\Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_{r-1}$. Tome um compacto $Q_{r-1} \subset W^s(\Lambda_1) \cup \ldots \cup W^s(\Lambda_{r-1})$ contendo os $\Lambda_i' s$ $i \in \{1, \ldots, r-1\}$, logo

$$\Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_{r-1} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(Q_{r-1})$$

Do último lema temos um compacto $\widetilde{M}_{r-1} \subset Q_{r-1}$ tal que

$$\Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_{r-1} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(\widetilde{M}_{r-1}),\ f(\widetilde{M}_{r-1}) \subset int.\widetilde{M}_{r-1}$$

No entanto, em princípio $\widetilde{M}_{r-1}$ não é uma variedade com bordo. Mas como $\widetilde{M}_{r-1}$ é compacto pelo Teorema de Uryson no caso diferenciável existe uma função φ de classe C^1 tal que

$$\varphi : M \to \mathbb{R}$$

$$\varphi^{-1}(0) = \widetilde{M}_{r-1} \text{ e } \varphi(x) \in [0,1], \forall x \in M$$

Pelo Teorema de Sard existe $\epsilon > 0$ tão pequeno quanto se queira de forma que seja valor regular e assim

$$M_{r-1} = \varphi^{-1}[0, \epsilon]$$

é uma variedade com bordo. Tomando este ϵ tão pequeno quanto se queira, por continuidade e compacidade ainda temos a propriedade

$$f(M_{r-1}) \subset int\ \widetilde{M}_{r-1} \subset int\ M_{r-1}$$

Vejamos agora como encontrar M_{r-2}. É a mesma idéia como anteriormente, apenas com uma pequena observação técnica: quando tomarmos Q_{r-2} suponhamos que esteja contindo em M_{r-1} (fazendo interseção por exemplo). E procedemos exatamente como feito acima. Esta condição garante que temos $M_{r-2} \subset M_{r-1}$. Repetindo o argumento encontramos todos os M_i. □

Ω estabilidade

Teorema 7.4 (Ω-estabilidade)**.** *$L(f)$ hiperbólico e sem ciclos. Então*

a) $\Omega(f) = L(f)$*;*

b) f *é* Ω*-estável.*

Demonstração. a) Como $L(f)$ é hiperbólico, fazendo a decomposição espectral e usando o fato que não há ciclos, existe uma filtração $\mathcal{F}$ para f, pelo Teorema 7.3.

Sabemos que $\Omega(f) \supset L(f)$, provemos a outra inclusão. Seja $x \in \Omega(f)$. A primeira observação é que x não pode pertencer a fronteira dos M_i, caso contrário entraria no interior e como a fronteira é compacta teriamos uma vizinhança de x que nunca retorna a ela. Logo $x \in int M_i - M_{i-1}$ para algum i. Vejamos que $x \in \bigcap_{n \leq 0} f^n(M_i - M_{i-1})$. Por absurdo suponha que não, portanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin f^{-n_0}(M_i - M_{i-1}) \Rightarrow f^{n_0}(x) \notin (M_i - M_{i-1})$ e portanto $f^{n_0}(x) \in M_{i-1}$. Mas então dada uma vizinhança de $f^{n_0}(x)$ ela não retorna próximo de x, absurdo. Portanto

$$x \in \bigcap_{n \leq 0} f^n(M_i - M_{i-1})$$

O outro caso é análogo. Teríamos por absurdo, que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin f^{n_0}(M_i - M_{i-1}) \Rightarrow f^{-n_0}(x) \in M_i^c$, mas existe uma vizinhança que iterando negativamente nunca volta a se intersectar, absurdo.

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i - M_{i-1}) = K_i(\mathcal{F}) \subset L(f).$$

b) Existe uma vizinhança $\mathcal{V}_f$ de f tal que $\forall g \in \mathcal{V}_f$, o difeomorfismo g tem a mesma filtração $\mathcal{F}$ que f e, pela estabilidade de conjunto hiperbólico maximal, $K_i(\mathcal{F}, f)$ e $K_i(\mathcal{F}, g)$ são conjugados. Lembrando que $K_i(\mathcal{F}, f) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i - M_{i-1})$. Afirmos que é possvel pegar uma vizinhança $\mathcal{V}_f$, se necessrio, ainda menor que a escolhida anteriormente para que tenhamos a igualdade

$$\Omega(g) = L(g), \ \forall g \in \mathcal{V}_f.$$

De fato, seja U_i vizinhança de $K_i(\mathcal{F}, f)$. Note que o conjunto $\widetilde{U}_i := (M_i - int\ M_{i-1}) \cap U_i^c$ é compacto. Todo ponto de $\widetilde{U}_i$ tem um iterado que sai do compacto $M_i - int\ M_{i-1}$, logo posso diminuir ainda mais $\mathcal{V}_f$ para que o mesmo aconteça quando olharmos para g nesses pontos. Isto implica que o conjunto $\widetilde{U}_i$ não pode conter pontos de $\Omega(g)$. E portanto, devido a filtração, temos que $\Omega(g) = L(g)$. Concluímos com isso que f é Ω-estável.

□

Dizemos que um difeomorfismo f é **Axioma A** se $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$ e $\Omega(f)$ é hiperbólico.

Observação 7.1. J. Palis e S. Newhouse [6] provaram que em dimensão dois sempre que $\Omega(f)$ for hiperbólico, então f é Axioma A. Todavia este resultado é falso para dimensões maiores do que três como mostrou Alan Dankner[7].

Dizemos que f satisfaz a **condição forte de transversalidade** (em $\Omega(f)$) se $W^s(x)$ intersecta transversalmente $W^u(y)$ para todo $x, y \in \Omega(f)$.

Observação 7.2. Estabilidade Estrutural

- Na topologia C^1, um difeomorfismo é estruturalmente estável se, e somente se, for Axioma A e satisfaz a condição forte de transversalidade.
- Se $L(f)$ é hiperbólico e tem transversalidade forte (para pontos de $L(f)$), então f é estruturalmente estável.

Exemplo 7.5.

a) **Axioma A não é Ω-estável.**

Começamos com o exemplo dado por Palis, na figura 1. Em seguida fazemos as perturbações nos pontos a e b como indicado na figura (lado direito). Assim, antes tinhamos $\Omega(f)$ sendo um conjunto com quantidade finita de pontos, depois da perturbação obtemos que $\Omega(f‘)$, onde $f‘$ é o perturbado, possui uma quantidade infinita de pontos. Olhe para pontos no arco entre os pontos c e d e use o lambda-lema.

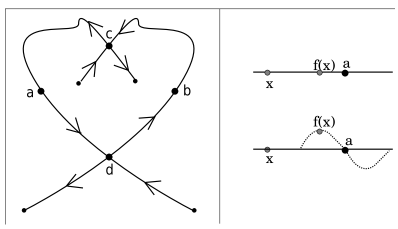


Figura 1: Axioma A

[6] Hyperbolic nonwandering sets on two-dimensional manifols, *Dynamical Systems **1973***

[7] On Smale‘s Axioma A dynamical systems, *Ann. of Math. (2)*, 1978

b) **Axioma A não é aberto (C^1).**

Como feito acima, fazemos a perturbação apenas no ponto a. Obtemos assim que o arco compreendido entre os pontos c e d que contém b é formado por pontos não errantes. Se esse perturbado fosse Axioma A, então haveria hiperbolicidade em cima do arco. Entretanto um vetor tangente ao arco para frente e para trás (pela derivada) diminui, um absurdo.

c) **Axioma A sem ciclo é aberto.**

Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo Axioma A sem ciclo. Então $\Omega(f) = \overline{Per(f)} = L(f)$, considere a decomposição espectral $L(f) = \Lambda_1(f) \cup \ldots \cup \Lambda_r(f)$ e seja $\mathcal{F}$ uma filtração para essa decomposição. Considere uma vizinhança de f, $\mathcal{V}_f$, de modo que $\mathcal{F}$ ainda seja filtração para os difeomorfismos dessa vizinhança. Como $L(f)$ é hiperbólico, por meio de cones invariantes podemos tomar a vizinhança $\mathcal{V}_f$ menor, se necessário, de modo a garantir que os $K_i(\mathcal{F}, g)$ sejam hiperbólicos para $g \in \mathcal{V}_f$. A filtração fornece $L(g) = \Omega(g)$, portanto g é axioma A.

d) **Se f é Axioma A, então f não contém 1-ciclo.**

Provemos por absurdo. Tome $x \in W^s(\Lambda_i) \cap W^u(\Lambda_i) \backslash \Lambda_i$. Como Λ_i é isolado, tem-se $x \in W^s(x_0) \cap W^u(x_1)$, para $x_0, x_1 \in \Lambda_i$. Seja U uma vizinhança de x. Existe um $r > 0$ de forma que $W^s_r(x_0) \cap U \neq \emptyset$ e $W^u_r(x_1) \cap U \neq \emptyset$. Tome $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente para que

$$x \in B(x_0, \epsilon) \Rightarrow W^s_r(x) \cap U \neq \emptyset$$

$$x \in B(x_1, \epsilon) \Rightarrow W^u_r(x) \cap U \neq \emptyset.$$

Como f é transitiva em Λ_i, pelo Lema de sombreamento existe um ponto periódico p cuja órbita visita os abertos $B(x_0, \epsilon)$ e $B(x_1, \epsilon)$. Ou seja, $f^{n_0}(p) \in B(x_0, \epsilon)$, $f^{n_1}(p) \in B(x_1, \epsilon)$. Tome um segmento tranversal a $W^s(x_0)$ contido em U, utilizando o λ-lema que existe k tal que $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$. Assim, $x_0 \in \Omega(f) \Rightarrow x_0 \in \Lambda_i$. Absurdo.

e) **Difeomorfismos estruturalmente estáveis não são densos** (C^1)

Pegue um atrator Λ e um ponto periódico hiperbólico, como na figura.

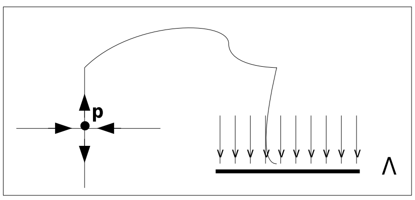
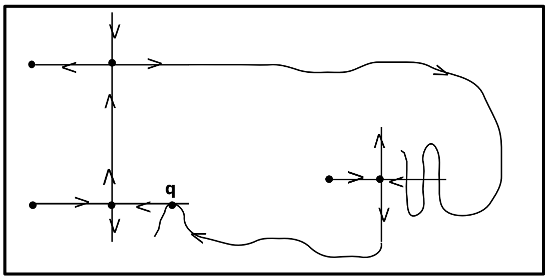


Figura 2: Não densidade de estruturalmente estável.

Toda perturbação deste difeomorfismo ainda existe tangência. E pela observação mais acima, implica que numa vizinhança nenhuma função é estruturalmente estável.

- $L(f)$ **hiperbólico, mas** $L(f) \subsetneq \Omega(f)$.

  Note da figura que $L(f) = Per(f)$ e $\{q\} \subset \Omega(f)$.



- **Axioma A não são densos**

Observação 7.3. Como observado em [2], não se sabe se Axioma A são densos em superfície com topologia C^1. No caso da topologia C^2 (em superfície) Axioma A não são densos, isto segue do fenômeno de Newhouse.

Exercícios

Exercício 7.1. Se f é Axioma A sem ciclos, então uma das peças é um atrator.

Exercício 7.2. Se $\omega(x)$ é hiperbólico, então $\omega(x) \subset \overline{Per(f)}$.

Exercício 7.3. Se f é Axioma A e $x \in \Omega(f)$ é um ponto homoclínico, então a interseção é transversal em x.

Exercício 7.4. Axioma A com ciclo tem tangência de variedade estável-instável no ciclo.

Exercício 7.5. Seja Λ um atrator transitivo, então toda variedade instável de $x \in \Lambda$ é densa em Λ.

Exercício 7.6. Teorema da R-estabilidade.
Sejam $f : M \to M$ um difeomorfismo e $R(f)$ hiperbólico.

a) $R(f) = \overline{Per(f)}$;

   Dica: Use que $R(f|_{R(f)}) = R(f)$ (Vide proposição 3.6, página 16, de [14]).

b) $R(f)$ não tem ciclo;

c) f é $R(f)$ estável.

Exercício 7.7. Exemplo em que $L(f) = \Omega(f)$ hiperbólico, mas $\Omega(f) \neq R(f)$.

Exercício 7.8. Exemplo em que Λ seja hiperbólico isolado, mas $\Omega(f|_\Lambda) \neq \Lambda$.

Exercício 7.9. Exemplo de Ω-estável que não seja estruturalmente estável.

8 Difeomorfismo de Anosov

Estudaremos agora uma classe importante de exemplos de sistemas dinâmicos.

Definição 8.1. Dizemos que um difeomorfismo $f : M \to M$ é de Anosov se M for um conjunto hiperbólico para f.

Seja $SL(\mathbb{Z}, n)$ o conjunto das matrizes com entradas inteiras e determinante igual a ± 1. Note que se $A \in SL(\mathbb{Z}, n)$ então $A(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$. Também temos que $A^{-1} \in SL(\mathbb{Z}, n)$ assim $A^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ e, portanto, $A(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$. Consequentemente, a transformação linear A induz um difeomorfismo no Toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Denotaremos este difeomorfismo por f_A, chamado também de **Anosov Linear**. Ou seja, temos que o diagrama abaixo comuta, onde $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ é a projeção canônica.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{T}^n \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{T}^n \end{tikzcd}$$

Neste caso os pontos periódicos são densos em M.

Proposição 8.1. *Se $f_A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ for um Anosov Linear, então*

$$\overline{Per(f_A)} = M$$

Demonstração. Defina o conjunto $Q(k) = \pi(\{(i_1/k, \ldots, i_n/k) \mid i_j \in \mathbb{Z}\})$. Assim, $Q(k) \subset \mathbb{T}^n$ e possui uma quantidade finita de pontos. Note que

$$f_A(Q(k)) \subset Q(k)$$

isto implica que f_A faz apenas uma permutação entre esses pontos. Logo periódicos. E como $\bigcup_{k=1}^{\infty} Q(k)$ é denso em $\mathbb{T}^n$ provamos o que queríamos. □

Em particular, para Anosov Linear $\Omega(f_A) = M$. Muito mais pode ser dito sobre f_A no entanto fazemos de maneira geral no Teorema (8.4).

Observação 8.1.

- De fato acredita-se que todo Anosov satisfaça esta propriedade: $M = \Omega(f)$.
- Vale também que todo Anosov no toro $\mathbb{T}^n$ é conjugado a um Anosov Linear.

Teorema 8.2.
- *Os difeomormismos de Anosov são estruturalmente estáveis.*
- *O conjunto dos difeomorfismo de Anosov formam um aberto na topologia C^1.*

A estabilidade estrutural segue diretamente da estabilidade de conjunto hiperbólico isolado. A segunda afirmação segue-se utilizando campo de cones.

Dizemos que um difeomorfismo de Anosov tem codimensão 1, se os subespaço intável ou estável tem dimensão 1.

Teorema 8.3. *Se $f : M \to M$ é um difeomorfismo de Anosov de codimensão 1, então a característica de Euler de M é zero.*

Demonstração. Consideremos o recobrimento duplo orientável de M:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[d, "\pi"] \\ M \end{tikzcd}$$

Seja $\widetilde{E}^s$ o campo de linha obtido pelo pull-back de E^s sobre M. Coloquemos uma orientação $\widetilde{\mathcal{O}}$ em $\widetilde{E}^s$ da seguinte forma. Dizemos que um vetor $X(x, \mathcal{O}) \in \widetilde{E}^s(x, \mathcal{O})$ é positivo se, $D\pi_{(x,\mathcal{O})}X(x, \mathcal{O})$ estiver na orientação de $\mathcal{O}$.

Pela nossa construção a orientação $\widetilde{\mathcal{O}}$ é contínua. Mas sendo $\widetilde{E^s}$ unidimensional posso tomar um campo não nulo que gera esta orientação. Portanto existe campo de vetores contínuos não nulo sobre $\widetilde{M}$. Em particular existe campo de vetores não nulo suave. Por conseguinte, a característica de Euler de $\widetilde{M}$ é zero. Sendo a caracterítica de Euler de M a metade da de $\widetilde{M}$ segue que esta também é zero, como queríamos. □

Corolário 8.1. *Se $dimM = 2$, então M é o Toro.*

Demonstração. Este resultado segue da classificação de superfícies compactas sem bordo. A única que tem característica de Euler zero é o toro. □

Observação 8.2. De fato vale mais do que provamos. A única variedade que admite um difeomorfismo de Anosov de codimensão 1 é o Toro n-dimensional.

O teorema acima mostra que um difeomorfismo de Anosov impões condições sobre a variedade. Ainda não se sabe quais variedades admitem um difeomorfismo de Anosov.

Teorema 8.4. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov. Então são equivalentes:*

(a) $\Omega(f) = M$;

(b) A variedade instável de todo ponto é densa em M;

(c) A variedade estável de todo ponto é densa em M;

(d) *f é transitiva;*

(e) *f é topologicamente misturadora.*

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Temos $\Omega(f) = \overline{Per(f)} = M$. Logo os periódicos estão na mesma classe de equivalência (de interseção tranversal das suas variedades intáveis e estáveis). Portanto pelo λ-lema $W^u(p)$ aproxima todo periódico, onde $p \in M$ é ponto periódico. Logo, $W^u(p)$ é denso. Dado $x \in M$ existe periódico p, possivelmente próximo de x, tal que a variedade instável de p intersecta a estável de x tansversalmente. Pelo λ-lema implica que a $W^u(x)$ é denso em M.

Analogamente $(a) \Rightarrow (c)$.

$(b) \Rightarrow (e)$: Dados U e V abertos, seja $\epsilon > 0$ tal V contenha uma bola de raio ϵ. A hipótese implica que existe um $L > 0$ tal que W^u_L é densa para todo ponto. Então tomando um segmento de variedade instável dentro de U e iterando pela f até que tenha comprimento maior que L, ele deverá necessariamente intersectar V. Logo existe $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Analogamente $(c) \Rightarrow (e)$. Sabemos que $(e) \Rightarrow (d)$ e $(d) \Rightarrow (a)$. Provando assim as equivalências.

□

Dizemos que um difeomorfismo $f : M \to M$ é **robustamente transitivo** se f é transitiva e existe uma vizinhança $\mathcal{V}_f$ de f na topologia C^1 tal que para toda $g \in \mathcal{V}_f$ é transitiva. Para um conjunto compacto Λ invariante por f transitiva, dizemos que é um **conjunto robustamente transitivo** se existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de Λ e $\mathcal{V}_f$ de f na topologia C^1 tal que: $\Lambda = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^n(\mathcal{U})$ e

$$\forall g \in \mathcal{V}_f \text{ e } \Lambda_g = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} g^n(\mathcal{U}) \Rightarrow g \text{ é transitiva em } \Lambda_g.$$

Proposição 8.2. *Se f é Anosov transitiva, então f é robustamente transitiva.*

Demonstração. Sabemos da estabilidade estrutural para conjuntos hiperbólicos isolados que, em uma vizinhança $\mathcal{V}_f$ para toda $g \in \mathcal{V}_f$ existe a conjugação $h_g : M \to \Lambda_g$. Em nosso caso a vizinhança do conjunto hiperbólico é a própria variedade, portanto $\Lambda_g = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(M) = M$. Pela conjugação, dado qualquer aberto existe um ponto peródico de g neste conjunto. Implicando $\Omega(g) = M$. □

Observação 8.3. Ricardo Mañé [8] provou que todo conjunto robustamente transitivo em uma superfície (dimensão dois) é um conjunto hiperbólico.

[8] Mañé, R., **An ergodic closing lemma**, *Annals of Math.*, 116:503-540, 1982.

Na década de 1970, Shub e Mañé deram exemplos de difeomorfimos robustamente transitivos e que não são hiperbólicos. Para a construção desses exemplos o leitor pode conferir no capítulo 7 de [2]. Tendo em vista que o objetivo da teoria é tentar descrever a "maioria" dos sistemas dinâmicos, a existência de tais exemplos mostra que só a condição de hiperbolicidade não serve para a descrição geral dos sistemas. É por isso que se deve enfraquecer um pouco a condição de hiperbolicidade, o que culmina no estudo da dinâmica parcialmente hiperbólica. Que nada mais é que uma definição mais fraca de hiperbolicidade.

Exercícios

Exercício 8.1. Se f é Anosov, então não há ciclos entre as peças da decomposição espectral.

Exercício 8.2. Seja f é Morse-Smale.

- f é Axioma A sem ciclos;
- f não é Anosov.

Exercício 8.3. Nem todo difeomorfismo de Anosov é induzido de um linear.

9 Endomorfismo Expansor

Todas as variedades serão supostas compactas e conexa a menos que dito explicitamente o contrário.

Definição 9.1. Uma transformação $f : M \to M$ de classe C^1 é dita *expansora* se existe $\lambda > 1$ e $C > 0$ tal que

$$||Df_q^n v|| \geq C\lambda^n ||v||$$

Vemos, por exemplo, que uma transformação expansora é um difeomorfismo local e, portanto, aberta.

Proposição 9.1. *Seja $f : M \to M$ uma transformação expansora. Então f é uma aplicação de recobrimento.*

Demonstração. Temos que f é difeomorfismo local, e sendo M compacta a imagem inversa de um ponto só pode ter finitas pré-imagens. □

Teorema 9.2. *Se $f, g : M \to M$ são expansoras e f é homotópica a g, então f e g são topologicamente conjugadas.*

Demonstração. Sejam $\widetilde{f}, \widetilde{g} : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ o recobrimento universal de f e g. Considere o homomorfismo de grupos

$$\rho : Aut(\pi) \to Aut(\pi) \text{ tal que } \widetilde{f} \circ \phi = \rho(\phi) \circ \widetilde{f}$$

Mas temos também que

$$\widetilde{g} \circ \phi = \rho(\phi) \circ \widetilde{g}$$

Isto porque como f e g são homotópicas as aplicações induzidas no grupo fundamental são iguais, e como $Aut(\pi)$ é difeomorfo a $\pi_1(M, p)$ temos

$$\begin{tikzcd} \pi_1(M,p) \arrow[r, "f_*=g_*"] \arrow[d] & \pi_1(M, f(p)) \arrow[d] \\ Aut(\pi) \arrow[r, "\rho"] & Aut(\pi) \end{tikzcd}$$

Queremos ver que existe uma única aplicação contínua $\widetilde{h} : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ tal que

- $\widetilde{h}\phi = \phi\widetilde{h} \quad \forall \phi \in Aut(\pi)$
- $\widetilde{h}\widetilde{f} = \widetilde{g}\widetilde{h}$

A primeira condição diz que podemos abaixar $\widetilde{h}$ para M.

Definamos o conjunto

$$\mathcal{H} = \{\widetilde{h} : \widetilde{M} \to \widetilde{M} \mid \widetilde{h}\phi = \phi\widetilde{h},\ \forall\phi \in Aut(\pi)\}$$

Podemos munir o conjunto $\mathcal{H}$ da seguinte métrica

$$d(\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2) = \sup_{x\in\widetilde{M}} d(\widetilde{h}_1(x), \widetilde{h}_2(x)).$$

Só precisamos verificar que d, como definida, é finita. Seja $\widetilde{B} \subset \widetilde{M}$ uma bola compacta, grande o suficiente para que $\pi(\widetilde{B}) = M$. Por compacidade, existe $L \in \mathbb{R}_+$ tal que $\sup_{x\in\widetilde{B}} d(\widetilde{h}_1(x), \widetilde{h}_2(x)) < L$. Assim, dado $x \in \widetilde{M}$ existe $\phi \in Aut(\pi)$ tal que $\phi(x) \in \widetilde{B}$. Haja vista que ϕ é uma isometria $d(\widetilde{h}_1(x), \widetilde{h}_2(x)) = d(\widetilde{h}_1(\phi(x)), \widetilde{h}_2(\phi(x)))$. Implicando a finitude

$$d(\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2) = \sup_{x\in\widetilde{M}} d(\widetilde{h}_1(x), \widetilde{h}_2(x)) = \sup_{x\in\widetilde{B}} d(\widetilde{h}_1(x), \widetilde{h}_2(x)) < L.$$

$\mathcal{H}$ torna-se, de fato, um espaço métrico completo. Definamos agora a seguinte função

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\ ,\quad T(\widetilde{h}) = \widetilde{f}^{-1}\widetilde{h}\widetilde{g}$$

Precisamos checar a boa definição de T, isto é, que $T(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$. Verificamos então que $T \circ \widetilde{f}^{-1} \circ \widetilde{h} \circ \widetilde{g} = \widetilde{f}^{-1} \circ \widetilde{h} \circ \widetilde{g} \circ T$.

$$\widetilde{f}^{-1} \circ \widetilde{h} \circ \widetilde{g} \circ T = \widetilde{f}^{-1} \circ \widetilde{h} \circ \rho(T) \circ g = \widetilde{f}^{-1} \circ \rho(T) \circ \widetilde{h} \circ g = T \circ \widetilde{f}^{-1} \circ \widetilde{h} \circ g$$

Usamos que $\widetilde{f}^{-1} \circ \rho(T) = T \circ \widetilde{f}^{-1}$ que segue do fato de $\widetilde{f} \circ \phi = \rho(\phi) \circ \widetilde{f}$ aplicado f^{-1} dos dois lados.

Provemos agora que para algum n T^n é uma contração.

$$d(T^n(\widetilde{h}_1)(x), T^n(\widetilde{h}_2)(x)) \leq \frac{1}{C\lambda^n} d(\widetilde{h}_1(g(x)), \widetilde{h}_2(g(x)) \leq \frac{1}{C\lambda^n} d(\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2)$$

Portanto,

$$d(T(\widetilde{h}_1), T(\widetilde{h}_2)) \leq \frac{1}{C\lambda^n} d(\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2)$$

Para algum n suficientemente grande T^n é uma contracão e existe um único ponto fixo $\widetilde{h}$ tal que $\widetilde{h} = T(\widetilde{h}) = \widetilde{f}^{-1} \circ \widetilde{h} \circ \widetilde{g}$. Então

$$\widetilde{f} \circ \widetilde{h} = \widetilde{h} \circ \widetilde{g}$$

Vejamos agora que este h induzido pelo $\widetilde{h}$ é um homeomorfismo. Existe único h tal que $hf = gh$. Assim como existe único k tal que $fk = kg$. Então $hkg = hfk = ghk$, por unicidade $hk = id$. Por outro lado, $fkh = kgh = khf$ implicando que $kh = id$. Logo h possui uma inversa contínua e assim é um homeomorfismo. $\square$

Obtemos como corolário um importante teorema sobre a estabilidade estrutural das funções expansoras.

Corolário 9.1. *Se f é expansora então f é estruturalmente estável.*

Demonstração. É sabido da topologia diferencial que existe vizinhança suficientemente próxima de f na topologia C^0 tal que toda função nesta vizinhança é homotópica a f. □

O próximo resultado além de ser útil para nós mais a frente, justifica o nome adotado de *expansora*.

Proposição 9.2. *Se f é expansora, então $B(f(x), C\lambda r) \subset f(B(x,r))$*

Demonstração. Podemos supor que $C = 1$. Seja $z \in B(f(x), \lambda r)$ seja γ a geodésica que liga $f(x)$ a z. Seja $\widetilde{\gamma}$ o levantamento de γ por f tal que $\overline{\gamma}(0) = x$. Assim o comprimento $d(f(x), z) = \int |\gamma'|dt = \int |(f \circ \overline{\gamma})'|dt \geq \lambda \int |\overline{\gamma}'|dt \geq \lambda d(x,y)$. Portanto $d(x,y) \leq d(f(x),z)/\lambda \leq \lambda r/\lambda = r$. Logo $y \in B(x,r)$ e como $f(y) = z$ provamos o que queriamos. □

Fica a observação de que usamos na prova o fato de que podemos ligar quaisquer dois pontos da variedade por uma geodésica. Isto é verdade no nosso caso pois trabalhamos com variedades compactas, todavia tal fato torna-se falso ao tratarmos de variedades quaisquer.

Corolário 9.2. *Se f é expansora, então dado $\epsilon > 0$ e $x \in M$ existe n tal que $f^n(B(x,\epsilon)) = M$*

Demonstração. Sendo M compacta existe um $r > 0$ tal que $B(x,r) = M$ $\forall x \in M$. Seja n tal que $C\lambda^n\epsilon > r$ então $M = B(f^n(x), C\lambda^n\epsilon) \subset f^n(B(x,\epsilon))$. □

Mais um vez utilizamos a teoria de espaços de recobrimento para tirarmos mais um resultado interessante.

Proposição 9.3. *Os pontos periódicos de uma transformação expansora é um conjunto denso.*

Demonstração. Seja $B = B(x,\epsilon)$ uma bola tal que $\epsilon < \delta$, onde δ é uma constante que esteja definida os ramos inversos de f. Para n grande o suficiente sabemos que $f^n(B) = M$. Considere o ramo inverso $f^{-n} : B \to B$, pelo Teorema do Ponto fixo de Brower existe um ponto fixo, que é portanto um ponto periódico para f. □

Exercícios

Exercício 9.1. a) Prove o Lema de Sombreamento para aplicações expansoras:

Teorema 9.3. *Seja $f : M \to M$ uma aplicação expansora. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ para o qual dado uma δ-pseudo órbita $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, existe único $y \in M$ que ϵ-sombrea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$;*

b) Prove a densidade dos pontos periódicos usando o lema de sombreamento;

c) Prove a estabilidade estrutural das aplicações expansoras utilizando o lema de sombreamento.

Exercício 9.2. $f : M \to M$ de classe C^1 e M variedade compacta.

a) Se f é expansora, então f é expansiva;

b) Dê um exemplo em que f seja expansiva, mas não seja expansora.

Exercício 9.3. Se $f : M \to M$ for difeomorfismo expansor, então M é difeomorfo ao $\mathbb{R}^n$.

Exercício 9.4. Se $f : M \to M$ for expansora e M compacta, então a característica de Euler de M é igual a zero.

10 Teoria Ergódica

Apresentamos nesta seção um dos resultados mais básicos e importantes da teoria ergódica. O Teorema de Recorrência de Poincaré; e, Birkhoff.

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, i.e. X é um conjunto qualquer, $\mathcal{B}$ uma σ-algebra de X e μ uma medida. Quando $\mu(X) = 1$ chamamos a tripla $(X, \mathcal{B}, \mu)$ de espaço de probabilidade. Trabalharemos com funções mensuráveis, $T : X \to X$ que preservam a medida μ: dado $A \in \mathcal{B}$ então $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$.

Exemplo 10.1. Considere a seguinte função

$$\begin{aligned} f: \quad S^1 &\to S^1 && (3) \\ x &\mapsto 2x \ (mod\ 1) && (4) \end{aligned}$$

É fácil ver que se $A = (a, b)$, então $\lambda(f^{-1}(A)) = \lambda(A)$, onde λ é a medida de lebesgue e $\mathcal{B}(S^1)$ é a *sigma*-álgebra de borel.

Defina o conjunto $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B}(S^1) \mid \lambda(f^{-1}(B)) = \lambda(B)\}$. Note que $\mathcal{A}$ é uma classe monótona contendo os intervalos, então a σ-álgebra gerada pelos intervalos está contida em $\mathcal{B}$. Mas esta é a σ-álgebra de borel, logo $\mathcal{A} = \mathcal{B}(S^1)$. Consequentemente f preserva λ.

Teorema 10.2 (Recorrência de Poincaré)**.** *Seja $T : X \to X$ uma transformação mensurável que preserva uma probabilidade μ. Dado $E \in \mathcal{B}$ com $\mu(E) > 0$, então existe $F \subset E$ com $\mu(F) = \mu(E)$, tal que: se $x \in F$, existem inteiros n_i, $i \in \mathbb{N}$, satisfazendo*

$$0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots \ ; \ f^{n_i}(x) \in E$$

Demonstração. Para $N \geq 0$ definamos $E_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}E$, onde $T^0E = E$. Considere agora o conjunto

$$F = E \cap \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n \right)$$

note que F é exatamente o conjuntos dos ponto de E que retornam infinitas vezes para E. Queremos provar que $\mu(F) = \mu(E)$.

Temos $T^{-1}(E_N) = E_{N+1}$, como T preserva μ, $\mu(E_N) = \mu(E_{N+1})$. Isso implica $\mu(E_0) = \mu(E_N)$, para todo N. Observe que $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \dots$. Assim $\mu(E_0) = \mu(\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N)$ e por conseguinte

$$\mu(F) = \mu(E \cap (\cap_{n=0}^{\infty} E_n)) = \mu(E \cap E_0) = \mu(E)$$

A segunda igualdade vem de $\cap_{n=0}^{\infty} E_n = E_0$ quase certamente; a última, decorre de $E \subset E_0$. Como queríamos provar. $\square$

Teorema 10.3 (Recorrência de Birkhoff). *Seja $T : X \to X$ uma transformação que preserva uma medida μ, onde X é um espaço com base enumerável (da topologia). Então $\mu(\{x \in X \mid x \in \omega(x)\}) = 1$*

Demonstração. Sejam B um boreliano e $\widetilde{B} = \{x \in B \mid T^j(x) \in B$ para infinitos $j\}$. Pelo Teorema 10.2, $\mu(\widetilde{B}) = \mu(B)$.

Sendo X separável, considere uma base enumerável de abertos A_n tais que $diam_{n\to\infty}(A_n) \to 0$. Temos $\widetilde{A_n} \subset A_n$ e pelo feito acima, $\mu(A_n - \widetilde{A_n}) = 0$. Defina

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n\geq m} \widetilde{A_n}$$

É fácil ver que $\mu(A) = 1$. Provemos que se $x \in A$, então $x \in \omega(x)$.

Considere $B(x, 1/j)$, $j \in \mathbb{N}$. Tome m_0 tal que $n > m_0$ tenhamos $diam.A_n < 1/3j$. Como $x \in A$, $x \in \widetilde{A}_n$ para $n > m_0$. Assim, $x \in \widetilde{A}_n \subset A_n \subset B(x, 1/j)$, logo existe $n_j > j$ tal que $f^{n_j}(x) \in A_n \subset B(x, 1/j)$, terminando demonstração. □

Nos teoremas acima a finitude da medida é crucial. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$. A transformação f preserva a medida de lebesgue da reta, entretanto não prodemos aplicar os teoremas de recorrência. De fato o que ocorre é que os iterados vão a infinito. A próxima proposição mostra como modificar o Teorema 10.2 no caso em que μ tenha medida não necessariamente finita. O que inclui nosso exemplo.

Proposição 10.1. *Seja $f : X \to X$ invertível e μ uma medida σ-finita invariante por f. Dado $E \in \mathcal{B}(X)$ com $\mu(E) > 0$, então quase todo ponto de E regressa a E ou "vai a infinito".*

Demonstração. Sendo μ uma medida σ-finita, $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$, com $\mu(X_i) < \infty$. Fixado $k \in \mathbb{N}$, defina os conjunto

$$N = \{x \in E \mid f^j(x) \notin E,\ j = 1, 2, 3, \ldots\};$$

$$A_n = \{x \in N \mid f^n(x) \in M_k\}.$$

Temos $A_n = N \cap f^{-n}(M_k) = f^{-n}(f^n(N) \cap M_k)$. Note que $\{f^n(N)\}_{n\in\mathbb{N}}$ são disjuntos. Então

$$\sum \mu(A_n) = \mu(\sum f^n(N) \cap M_k) \leq \mu(M_k)$$

Portanto pelo Lema de Borel-Cantelli $\mu(lim\ sup\ A_n) = 0$. □

Exemplo 10.4. Seja $T : X \to X$, preservando μ. Tome $A \subset X$ de medida positiva e considera a medida condicional, μ_A, restrita a A. Isto é, $\mu_A(B) =$

$\mu(A \cap B)/\mu(A)$. Para $x \in A$ defina o tempo de primeiro retorno $n(x) = min\{n \in \mathbb{N} \mid T^n(x) \in A\}$. Seja T_A a **aplicação de primeiro retorno**:

$$\begin{aligned} T_A : A &\rightarrow A \\ x &\mapsto T^{n(x)}(x) \end{aligned}$$

Afirmação: T_A preserva a medida μ_A.

Seja $B \subset A$, então $T^{-1}(B) = B_{-1} \cup B^0_{-1}$, onde $B_{-1} \subset A$ e $B^0_{-1} \cap A = \emptyset$. Analogamente $T^{-1}(B^0_{-1}) = B_{-2} \cup B^0_{-2}$, onde $B_{-2} \subset A$ e $B^0_{-2} \cap A = \emptyset$ e assim por diante.

Note que os B^0_{-i} são disjunto e estando num espaço de medida finita $\lim\limits_{i \to \infty} \mu(B^0_{-i}) = 0$.

$$\mu(B) = \mu(T^{-1}(B)) = \mu((\cup_{i=1}^n B_{-i}) \cup B^0_{-n}) = \mu((\cup_{i=1}^\infty B_{-i}) = \mu(T_A^{-1}(B))$$

$$\Rightarrow \mu_A(T_A^{-1}(B)) = \mu_A(B)$$

Exercícios

Exercício 10.1. Seja $A \subset Diff^1(S^1)$ o conjunto dos difeomorfismo para os quais as únicas medidas invariantes sejam atômicas. Então o conjunto A é denso.

11 Medidas Invariantes

A menos que dito o contrário, M será um espaço métrico compacto.

Exemplo 11.1. Queremos encontrar para os próximos exemplos medidas (borelianas) invariantes.

a)
$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to [0,1] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

O conjuntos dos pontos recorrêntes para f é $\{0,1\}$. Portanto o suporte de uma medida invariante está contido em $\{0,1\}$. Por isso as únicas medidas possíveis são da forma

$$\alpha\delta_0 + \beta\delta_1$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ e δ_i é a medida de Dirac no ponto i.

b)
$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto x^2 \text{ , } x \notin \{0,1\} \\ f(x) &= 1/2 \text{ , } x \in \{0,1\} \end{aligned}$$

O único ponto errante é o zero. Mas a probabilidade candidata, o delta de dirac em 0, não é invariante.

$$\delta_0(f^{-1}[0,1/4]) = \delta_0((0,1/4]) = 0 \neq 1 = \delta_0([0,1/2])$$

Logo, f não possui medida invariante.

c)
$$\begin{aligned} f : (0,1) &\longrightarrow (0,1) \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

f não possui medida invariante.

Topologia no conjunto de probabilidades

Definição 11.2. Seja $(M, \mathcal{B}(M))$ um espaço mensurável, com M espaço métrico compacto e $\mathcal{B}(M)$ a sigma álgebra de Borel. Definimos o seguinte conjunto
$$\mathcal{M} = \{\textit{probabilidades em } (M, \mathcal{B}(M))\}$$

Definição 11.3. Dado $f : M \to M$ mensurável, denotamos por $\mathcal{M}_0$ o conjuntos das medidas $\mu \in \mathcal{M}$ que sejam f-invariantes.

Munimos o conjunto $\mathcal{M}$ da topologia menos fina que torna a seguinte aplicação, I_ϕ, contínua

$$\begin{array}{rcl} I_\phi : \mathcal{M} & \to & \mathbb{R} \\ \eta & \mapsto & \displaystyle\int \phi \, d\eta \end{array}$$

onde $\phi : M \to \mathbb{R}$ é contínua.

Uma base para esta topologia seria portanto os conjuntos da forma

$$V_\mu(f_1, \ldots, f_n; \epsilon) = \left\{ m \in \mathcal{M}(X) \mid \left\| \int f_i \, dm - \int f_i \, d\mu \right\| \leq \epsilon, \ i = 1, \ldots, n. \right\}$$

$$\forall f_i \in C^0(X), \mu \in \mathcal{M}(X), \epsilon > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Definição 11.4. Chamamos a topologia de $\mathcal{M}$ dada acima, por *Topologia Fraca** ou *Topologia Fraca Estrela.*

Fixemos um subconjunto denso enumerável, $\{\phi_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, na bola unitária de $C^0(M)$ (funções contínua de M em $\mathbb{R}$). Consideremos a seguinte função

$$\begin{array}{rcl} d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} & \to & \mathbb{R} \\ (\eta_1, \eta_2) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left| \int \phi_k d\eta_1 - \int \phi_k d\eta_2 \right| \end{array}$$

Proposição 11.1. *A função d, acima, define uma métrica no espaço $\mathcal{M}$.*

Demonstração. A única dificuldade está em mostrar: se $d(\eta_1, \eta_2) = 0$, então $\eta_1 = \eta_2$. Este fato segue diretamente pela unicidade no teorema de representação de Riez. Entretando damos uma solução que não usa este teorema.

Suponha, por absurdo, que $\eta_1 \neq \eta_2$. Existe B boreliano tal que $\eta_1(B) > \eta_2(B)$ (outro caso é análogo). Logo existe um compacto K tal que $\eta_1(K) > \eta_2(K) \Rightarrow \eta_1(K) = \eta_2(K) = \delta$. Pelo lema de Urysohn podemos tomar $\phi : X \to \mathbb{R}$ tal que $\phi|_K \equiv 1$, $\phi|_{V \setminus K} \in (0, 1)$ e $\phi|_{V^c} \equiv 0$, onde V é uma vizinhança de K.

Podemos fazer V tão próxima de K de forma que $\delta > \eta_2(V \setminus K)$. Com isso,

$$\int \phi d\eta_1 \geq \eta_1(K) = \eta_2(K) + \delta > \int_K \phi d\eta_2 + \int_{V \setminus K} \phi d\eta_2 = \int \phi d\eta_2$$

O cálculo acima mostra que $\int \phi d\eta_1 > \int \phi d\eta_2$. E como os ϕ_k da definição de d são densos, existe ϕ_{k_0} com $\int \phi_{k_0} d\eta_1 > \int \phi_{k_0} d\eta_2$. O que é um absurdo. □

Proposição 11.2. *A Topologia Fraca* e a topologia dada pela métrica d coincidem.*

Demonstração. i) Seja U_0 um aberto da topologia gerada por d. Podemos supor que $U_0 = B_d(\mu_0, \epsilon)$ (bola na métrica d de raio ϵ centrada em μ_0) Seja $l > 0$ tal que

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} | \int \phi_k d\eta_1 - \int \phi_k d\eta_2 | < \epsilon/2$$

para quaisquer probabilidades η_1, η_2.

Como $I_{\phi_1}, \ldots, I_{\phi_l}$ são contínuas, tome δ pequeno o suficiente de forma que, se

$$\eta \in V_0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{l} | \int \phi_k d\mu_0 - \int \phi_k d\eta | < \epsilon/2$$

onde

$$V_0 = \bigcap_{\alpha=1}^{l} I_{\phi_\alpha}^{-1} \left(I_{\phi_\alpha}(\mu_0) - \delta, I_{\phi_\alpha}(\mu_0) + \delta \right)$$

Obtemos, $d(\mu_0, \eta) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Então $V_0 \subset U_0$.

ii) Seja V_0 um aberto da topologia fraca estrela. Podemos supor que

$$V_0 = \bigcap_{\alpha=1}^{l} I_{\phi_\alpha}^{-1} (I_{\phi_\alpha}(\mu) - \delta, I_{\phi_\alpha}(\mu) + \delta)$$

É fácil ver que tomando uma bola suficientemente pequena, $B_d(\mu, \epsilon) \subset V_0$.

□

Proposição 11.3. *Uma sequência $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge a η em $\mathcal{M}$ se, e somente se, $\lim_{k\to\infty} \int \phi d\eta_k = \int \phi d\eta$, $\forall \phi \in \mathcal{M}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) : Suponha $d(\eta_i, \eta) \to 0$. Dado $\epsilon > 0$ e $\phi \in C^0(M)$, defina $k_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $|\phi - \phi_{k_0}| < \epsilon/4$. Tome i_0 grande o suficiente para que se $i \geq i_0$, então

$$| \int \phi_{k_0} d\eta_i - \int \phi_{k_0} d\eta | < \epsilon/2$$

Para $i \geq i_0$ tem-se

$$\begin{aligned} | \int \phi d\eta_i - \int \phi d\eta | &\leq | \int \phi_i d\eta - \int \phi_k d\eta_i | + | \int \phi_k d\eta_i - \int \phi_k d\eta | \\ &+ | \int \phi_k d\eta - \int \phi d\eta | \leq \epsilon/4 + \epsilon/2 + \epsilon/4 = \epsilon \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$: Exercício.

$\square$

Corolário 11.1. *Seja $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ um sequência em $\mathcal{M}$ Se $(\int \phi d\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge para toda $\phi \in C^0(M)$, então a sequência $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge fracamente a uma medida.*

Demonstração. Defina

$$\begin{array}{rcl} I : C^0(M) & \to & \mathbb{R} \\ \phi & \mapsto & \lim\limits_{i\to\infty} \int \phi d\eta_i \end{array}$$

I é linear, não negativa e de norma igual a 1. Podemos aplicar o Teorema de Riez. $\square$

Teorema 11.5. *Na topologia fraca estrela, $\mathcal{M}$ é compacto.*

Demonstração. Seja $\{\phi_k\}_{i\in\mathbb{N}}$ um conjunto denso em $C^0(M)$. Dada uma sequência $\{\mu_i\}$ em $\mathcal{M}$, mostremos que admite uma subsequência convergente.

Para $k = 1$, a sequência $\{\int \phi_1 d\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de reais, é limitada logo admite subsequência convergente (de subíndice $\mathbb{N}'$).

Para $k = 2$, a sequência $\{\int \phi_2 d\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}'}$ é limitada, logo admite subsequência convergente.

Utilizando o processo de diagonal de cantor obtemos uma sequência $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de naturais, de forma que para todo $k \in \mathbb{N}$ a sequência $\{\int \phi_k d\mu_{m_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ seja convergente.

Isto implica que $\{\int \phi d\mu_{m_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge para toda $\phi \in C^0(M)$, pois $\{\int \phi_k d\mu_{m_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de cauchy, pela desigualdade abaixo

$$\begin{array}{rcl} \left|\int \phi d\mu_{m_i} - \int \phi d\mu_{m_j}\right| & \leq & \left|\int \phi d\mu_{m_i} - \int \phi_k d\mu_{m_i}\right| + \left|\int \phi_k d\mu_{m_i} \right. \\ & - & \left. \int \phi_k d\mu_{m_j}\right| + \left|\int \phi_k d\mu_{m_j} - \int \phi d\mu_{m_j}\right| \end{array}$$

Vemos que $\{\int \phi d\mu_{m_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ é cauchy $\forall \phi \in C^0(M)$. O corolário acima implica a convergência das medidas $\{\mu_{m_i}\}$, como queríamos. $\square$

Seja $f : M \to M$ uma função mensurável. O push-forward em $\mathcal{M}$ é a função

$$f_* : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$$

onde $(f_*\mu)(E) = \mu(f^{-1}(E))$. Note que uma medida invariante para f é um ponto fixo de f_*.

Proposição 11.4. *Se $f : M \to M$ for contínua, então $f_* : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ é contínua.*

Demonstração. Seja $\eta_n \to \eta$. Então, para $\phi \in C^0(M)$

$$\int \phi \, d(f_*\eta_n) = \int \phi \circ f \, d\eta_n \to \int (\phi \circ f) \, d\eta = \int \phi \, d(f_*\eta)$$

Então $f_*\eta_n \to f_*\eta$, logo f_* é contínua. □

Exemplo 11.6. Seja $f : [0,1] \to [0,1]$, definida por $f(0) = 0$, $f(x) = 1$ se $x \neq 0$. Tome $\phi \in C^0([0,1])$ dada por $\phi(x) = x$. Note que $\phi \circ f = f$. Sabemos que as medidas $\delta_{1/n}$, delta de Dirac centradas em $1/n$, convergem fracamente a δ_0. Entretanto $f_*\delta_{1/n} \nrightarrow f_*\delta_0$, já que

$$\begin{aligned} \int \phi \, d(f_*\delta_{1/n}) &= \int \phi \circ f \, d\delta_{1/n} = \int f \, d\delta_{1/n} = 1 \\ &\neq 0 = \int f \, d\delta_0 = \int \phi \, d(f_*\delta_0) \end{aligned}$$

Proposição 11.5. *Sejam $\eta_n, \eta \in \mathcal{M}$, $n \geq 0$ então são equivalentes:*

- *$\eta_n \to \eta$, na Topologia Fraca*;*
- *Para todo fechado $F \subset M$ então lim sup $\eta_n(F) \leq \eta(F)$;*
- *Para todo aberto $U \subset M$ então lim inf $\eta_n(U) \geq \eta(U)$;*
- *Para todo $A \in \mathcal{B}(M)$ com $\eta(\partial A) = 0$ então $\eta_n(A) \to \eta(A)$.*

Teorema 11.7 (Krylov-Bogolubov)**.** *Seja $f : M \to M$ uma transformação contínua em um espaço métrico compacto. Então f admite uma medida de probabilidade invariante.*

Demonstração. Seja μ uma probabilidade qualquer em $\mathcal{M}$. Defina

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j \mu$$

Sabemos que μ_n possui subsequência convergente. Denote este limite por μ_0; $\mu_{n_i} \to \mu_0$. Usando a continuidade de f_*:

$$\begin{aligned} f_*\mu_0 &= f_*\left(\lim_{i\to\infty} \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} f_*^j \mu \right) = \lim_{i\to\infty} \left(\frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} f_*^j \mu + \frac{1}{n_i} f_*^{n_i} \mu - \frac{1}{n_i} \mu \right) \\ &= \mu_0. \end{aligned}$$

Para a última igualdade olhe as medidas integrando sobre as funções contínuas, a contribuição de $\frac{1}{n_i} f_*^{n_i} \mu - \frac{1}{n_i} \mu$ vai a zero.

□

Exercícios

Exercício 11.1. a) A transformação

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to [0,1] \\ x &\mapsto 10x \ (mod\, 1) \end{aligned}$$

preserva a medida de lebesgue.

b) Quase todo ponto $x \in [0,1]$ cuja expansão decimal aparece o bloco $a_1 a_2 \dots a_k$ (por exemplo: $x = 0,4265a_1a_2\dots a_k837\dots$), esse bloco aparece infinitas vezes na expansão decimal.

Exercício 11.2. Seja $f : M \to M$ contínua, então f possui ponto recorrente.

Exercício 11.3. a) Sejam $f_1, f_2, \dots, f_N : M \to M$ uma família de transformações contínuas que comutam entre si ($f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$). Então existe uma probabilidade invariante por todas essas transformações.

b) Se $N = \infty$ vale o mesmo resultado.

12 Teorema Ergódico de Birkhoff

Considere $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. Se é $T : X \to X$ uma função mensurável, então a n-ésima média de Birkhoff para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável é definida como

$$S_n(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$$

Proposição 12.1 (Lema Ergódico Maximal)**.** *Seja $T : X \to X$ uma transformação mensurável que preserva a medida μ. Suponha $f \in L^1(X, \mu)$ e defina*

$$E_n = \{x \in X \mid \sum_{i=0}^{j-1} f(T^i(x)) > 0 \textit{ para algum } j \leq n\}.$$

Então

$$\int_{E_n} f d\mu \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Defina

$$F_n(x) = max\left(0, \sum_{i=0}^{j-1} f(T^i(x)) \ : j \leq n\right)$$

as funções assim definidas são crescentes: $F_n \leq F_{n+1}$. É fácil ver que

$$F_{n+1} = max(0, f + F_n \circ T).$$

Em E_{n+1} temos $F_{n+1} = f + F_n \circ T \Rightarrow f = F_{n+1} - F_n \circ T$.
Note que $F_{n+1} = 0$ fora de E_{n+1}; sempre vale $-F_n \circ T \leq 0$. Assim

$$F_{n+1} - F_n \circ T \leq 0 \ \text{ fora da } E_{n+1}.$$

Usando estas desigualdades e o fato que T preserva a medida μ:

$$\begin{aligned} \int_{E_{n+1}} f d\mu &= \int_{E_{n+1}} (F_{n+1} - F_n T) d\mu \geq \int_X (F_{n+1} - F_n T) d\mu \\ &= \int_X (F_{n+1} - F_n) d\mu \geq 0 \end{aligned}$$

Como queríamos.

□

Corolário 12.1. *Se $E_\infty := \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$, então $\int_{E_\infty} f \, d\mu \geq 0$.*

Corolário 12.2.

$$\int_{\widetilde{E}_n(\alpha)} \phi \, d\mu \geq 0$$

onde $\widetilde{E}_n(\alpha) = \{x \in X \mid \sum_{i=0}^{j-1} f(T^i(x)) > 0$ *para algum* $j \leq n\}$.

Começamos com uma versão um pouco mais geral do teorema ergódico, dado que a medida utilizada é apenas σ-finita.

Teorema 12.1 (Teorema Ergódico de Birkhoff, para medida σ-finita)**.** *Seja* $T : X \to X$ *função mensurável preservando uma medida* σ*-finita* μ*. Se* $f \in L^1(X, \mu)$*, então*

- $f^+(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$ *existe* μ*-q.t.p.;*
- $f^+ \in L^1(\mu)$*.*

Demonstração. Dados dois racionais $u, v \in \mathbb{Q}$ considere o seguinte conjunto

$$E_{u,v} = \{x \in X \mid \limsup_n S_n(f,x) > v > 0 \geq u > \liminf_n S_n(f,x)\}$$

Provemos que $\mu(E_{u,v}) = 0$. Veja que tomar $v > 0$ não é de fato uma restrição, caso exista x e racionais u, v tais que

$$\limsup_n S_n(f,x) > 0 \geq v > u > \liminf_n S_n(f,x)$$

então basta olharmos para

$$\liminf_n S_n(-f,x) < 0 \leq -v < -u < \limsup_n S_n(-f,x)$$

e portanto recaímos em um conjunto do tipo $E_{-v,-u}$ como acima, só que para $-f$.

Veja que $T^{-1}(E_{u,v}) \subset E_{u,v}$. Como T preserva medida, posso supor $X = E_{u,v}$. Faremos isso pois usaremos o corolário do Lema Ergódico Maximal mais adiante e o nosso E_∞ será o proprio $X(= E_{u,v})$ caso não o fosse, E_∞ poderia ser um conjunto um pouco maior.

Se $x \in X$, para algum n temos $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f(T^i(x) - v) > 0$. A função $f - v \notin L^1(\mu)$ se $\mu(X) = \infty$. Considere $A \subset X$ mensurável, com $\mu(A) < \infty$. Agora a função $f - v\chi_A$ é integrável e $\forall x \in X$ existe n tal que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f(T^i(x) - \chi_A v) > 0$$

veja que continua a desigualdade estrita dado que tomamos $v > 0$.

Aplicando o Lema Ergódico Maximal

$$\int_X (f - v\chi_A) d\mu \geq 0 \Rightarrow \int_X f d\mu \geq v\mu(A)$$

Crescendo A para todo X (aqui usamos que é σ-finito), usando o fato que f é integrável, então $\mu(X) < \infty$. Usando este fato, vemos que $u - f \in L^1(\mu)$ e que para algum n,

$$u - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) > 0$$

O Lema Ergódico Maximal novamente fornece

$$\int_X (u - f) \geq 0 \Rightarrow \int_X f d\mu \leq u\mu(X)$$

Comparando as desigualdades obtidas, e lembrando que $X = E_{u,v}$ obtemos

$$v\ \mu(E_{u,v}) \leq \int_X f\ d\mu \leq u\ \mu(E_{u,v})$$

E como $u < v \Rightarrow \mu(E_{u,v}) = 0$. Concluímos a primeira parte, f^+ existe q.t.p..

Pelo lema de Fatou $\int_X \phi^+ d\mu \leq \liminf_n \int_X S_n(f,.)d\mu = \int_X f d\mu$. Portanto $\phi^+ \in L^1(\mu)$. □

Agora, o teorema ergódico em espaço de probabilidade, conseguimos assim mais informações.

Teorema 12.2 (Teorema Ergódico de Birkhoff, em espaço de probabilidade)**.** *Seja $T : X \to X$ função mensurável preservando uma probabilidade μ.*

a) Se $f \in L^p(X,\mu)$, $1 \leq p < \infty$, então

- $f^+(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) \in L^p(\mu)$;
- $\lim_{n\to\infty} \left\| f^+ - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) \right\|_p = 0$;
- $f^+ \circ T = f^+$.

b) Se $f \in L^1(\mu)$, então

$$\int_X f^+ d\mu = \int_X f d\mu.$$

Demonstração. a) Seja g uma função em $L^\infty(X,\mu)$, logo em $L^p(X,\mu)$. Sabemos que $S_n(g)$ convergem quase certamente a g^+. Logo $|S_n(g,x)-g^+(x)| \to 0$ quase certamente, pelo teorema da convergência dominada $||S_n(g)-g^+||_p \to 0$.

Seja $f \in L^p(\mu)$. Provemos que $\{S_n(f)\}$ é uma sequência de cauchy. Dado $\epsilon > 0$, seja $g \in L^\infty(\mu)$ tal que $||f-g||_p < \epsilon/4$. Pelo feito acima, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ para o qual $||S_n(g) - S_{n+k}(g)||_p < \epsilon/2$, $\forall k > 0$. Assim para $n > n_0$ e $k > 0$

$$\begin{aligned} ||S_n(f) - S_{n+k}(f)||_p &\leq ||S_n(f) - S_n(g)||_p + ||S_n(g) - S_{n+k}(g)||_p \\ &+ ||S_{n+k}(f) - S_{n+k}(f)||_p \leq \epsilon/4 + \epsilon/2 + \epsilon/4 = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo $S_n(f)$ converge a uma função f^* que deve ser portanto f^+.

Por fim, observe que

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)(S_{n+1}(f)) - (S_n(f))(T(x)) = \frac{f(x)}{n}$$

Fazendo n tender a infinito

$$f^+ \circ T = f^+.$$

b) Como temos convergência em $L^1(\mu)$ então

$$\begin{aligned} \int_X f^+ d\mu &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_X f \circ T^j d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_X f d\mu = \int_X f d\mu. \end{aligned}$$

□

Seja $T : X \to X$ mensurável e μ uma probabilidade T-invariante. O conjunto $F = \{g \in L^2(X,\mu) \mid g \circ T = g\}$ é um subespaço fechado do espaço de Hilbert $L^2(X,\mu)$. Considere

$$\pi : L^2(X,\mu) \to F$$

a projeção ortogonal.

Teorema 12.3. *Com a notação acima temos que se $f \in L^2(X,\mu)$, então $\pi(f) = f^+$.*

Demonstração. Dado $g \in F$ queremos ver que $< f - f^+, g >= 0$, i.e. $\int_X (fg - f^+g) = 0$. Temos que

$$\int_X (fg - f^+g)d\mu = \int_X (fg - f^+g)^+ d\mu = \int_X (fg)^+ - (f^+g)^+ d\mu$$

Porém, usando a invariância de g, f^+ por T obtemos $(fg)^+ = f^+g$, $(f^+g)^+ = f^+g$. □

Obtemos agora o seguinte resultado

Corolário 12.3. *Se $T : X \to X$ for invertível, então $f^+ = f^-$ quase todo ponto. Onde*

$$f^-(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^{-j}(x))$$

Demonstração. Podemos provar o resultado para $f \in L^2$ o que implica para $f \in L^1$. Isto pois, dado $f \in L^1$ podemos tomar $f_n \to f$ uniformemente e $f_n \in L^2$. Assim

$$\begin{aligned} \int_X |f_n - f| \, d\mu &= \int_X |f_n^+ - f^+| \, d\mu \\ &= \int_X |f_n^- - f^-| \, d\mu \end{aligned}$$

Entretanto $f^+ = f^-$ e usando a desigualdade triangular temos

$$\int_X |f^+ - f^-| d\mu \le \int_X |f^+ - f_n^+| d\mu + \int_X |f_n^- - f^-| d\mu \le 2 \int_X |f_n - f| \, d\mu$$

que vai a zero quando $n \to \infty$. Logo $f^+ = f^-$ quase todo ponto.

Por fim, o resultado vale para $f \in L^2$ pela proposição acima. Note que o conjunto F também é igual a $\{g \in \mathcal{L}^2(X) \mid g \circ T^{-1} = g\}$. Pela proposição como π é a projeção, por um lado $\pi(f) = f^+$, por outro $\pi(f) = f^-$. □

Exercícios

Exercício 12.1. Exemplo em que μ seja medida σ-finita, $T : X \to X$, μ seja uma medida invariante por T, $\phi \in L^1(\mu)$, mas $\int \phi^+ \, d\mu \neq \int \phi \, d\mu$.

13 Sistemas Ergódicos e Unicamente Ergódicos

Teorema 13.1. *Seja $T : X \to X$ uma função mensurável em um espaço de probabilidade que preserva a probabilidade μ. São equivalentes:*

a) ϕ^+ *é constante μ-q.t.p.* $\forall \phi \in L^1$*;*

a') ϕ^+ *é constante μ-q.t.p.* $\forall \phi$ *em m conjunto denso de* L^1*;*

b) $\phi^+ = \int \phi \, d\mu \ \forall \phi \in L^1$*;*

b') $\phi^+ = \int \phi \, d\mu \ \forall \phi$ *em um subconjunto denso de* L^1*;*

c) Se $\phi : M \to \mathbb{R}$, tal que $\phi(T(x)) = \psi(x)$ μ-q.t.p. então ϕ é constante μ-q.t.p.;

d) Se $A \subset M$ tal que $T^{-1}(A) = A$, então $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$;

d') Se $A \subset M$ tal que $T^{-1}(A) \subset A$, então $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$;

d") Se $A \subset M$ tal que $T^{-1}(A) \supset A$, então $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

Demonstração.

- *a)* $\Rightarrow$ *c)*: $\phi \circ T = \phi$ implica $\phi^+ = \phi$, que é constante q.t.p. por hipótese.

- *c)* $\Rightarrow$ *a)*: Sabemos que $\phi^+ \circ T = \phi^+$, logo ϕ^+ é constante q.t.p..

- *c)* $\Rightarrow$ *d)*: Tome $\phi = \chi_A$. Se $T^{-1}(A) = A$ então $\phi \circ T = \phi$. Por hipótese ϕ é constante q.t.p. igual a zero ou 1. Integrando ϕ sobre X obtemos o desejado.

- *d)* $\Rightarrow$ *c)*: Dada ϕ invariante. Defina $A_c = \{x \mid \phi(x) \leq c\}$, note que A_c é invariante por T. Logo $\mu(A_c) = 0$ ou 1. Considere a função

  $$c \mapsto \mu(A_c)$$

  seja c_0 o ponto em que ocorre a descontinuidade, isto é, $c_0 = sup\{c \mid \mu(A_c) = 0\}$. Portanto,

  $$\forall c < c_0 \Rightarrow \mu(\{x|\phi(x) < c\}) = 0 \text{ e } \forall c > c_0 \Rightarrow \mu(\{x|\phi(x) > c\}) = 0$$

  Sendo

  $$\{x \mid \phi(x) \neq c_0\} = (\cup_{k=1}^{\infty} A_{c-1/k}) \cup (\cup_{k=1}^{\infty} (A_{c_0+1/k})^c)$$

  uma união enumerável de conjuntos de medida nula, então $\{x \mid \phi(x) \neq c_0\}$ tem medida nula. Por conseguinte $\phi(x) = c_0$ q.t.p..

- $a') \Rightarrow a)$: Pelo Teorema Ergódico definamos

$$\begin{aligned} B : L^1(\mu) &\rightarrow L^1(\mu) \\ \phi &\mapsto \phi^+ \end{aligned}$$

que é linear e contínua dado que $||B|| \leq 1$ ($||\phi^+||_1 \leq ||\phi||_1$). Seja $D \subset L^1(\mu)$ um conjunto denso como na hipótese. Sendo B contínua $B(\overline{D}) \subset \overline{B(D)}$. Então

$$B(L^1(\mu)) \subset \overline{\{\text{funções constantes}\}} = \{\text{funções constantes}\}$$

$\square$

Definição 13.2. Dizemos que (f, μ) é ergódica se satisfaz uma das propriedades acima.

Exemplo 13.3.

a) A rotação irracional $R_\theta : S^1 \rightarrow S^1$ é ergódica com relação a medida de Lebesgue.

   Seja $\psi : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ integrável. Sua série de Fourier é dada por $\psi(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n\alpha}$, $a_n \in \mathbb{C}$. Chequemos a propriedade $c)$ do Teorema 13.1. Se $\psi \circ R_\theta = \psi$, então

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n(\alpha+\theta)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n\alpha} .$$

   Por conseguinte $a_n e^{2\pi i n\theta} = a_n \; \forall n \in \mathbb{Z}$. Se $2\pi i n\theta \in 2\pi i\mathbb{Z}$, então $n = 0$ já que $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

   Para $n \neq 0 \Rightarrow a_n = 0$. Logo $\psi = a_0$, e portanto constante q.t.p..

b) Seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ um vetor *racionalmente independente*, isto é $\sum_{i=1}^n a_i\alpha_i \notin \mathbb{Z}, \forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$. Uma rotação irracional no toro é uma aplicação da forma

$$\begin{aligned} T : \mathbb{T}^n &\rightarrow \mathbb{T}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (x_1 + \alpha_1, \ldots, x_n + \alpha_n) \end{aligned}$$

   Analogamente ao item a), seja $\phi \in C^0(\mathbb{T}^n)$ que comuta com T, então $\phi(X) = \sum_{Z\in\mathbb{Z}^n} a_Z e^{2\pi i <Z,X>}$. E concluímos que $a_Z = 0, \forall Z \neq 0 \in \mathbb{Z}^n$.

Exemplo 13.4. Seja

$$\begin{aligned} E_m : [0,1] &\rightarrow [0,1] \\ x &\mapsto mx \; (mod\, 1) \end{aligned}$$

E_m preserva lebesgue. Provemos que E_m é ergódica. Seja $\phi \in C^0([0,1])$ que comuta com E_m. Considere a série de Fourier de ϕ. $\phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x}$. Portanto $a_n = a_{mn}$. A teoria de Fourier nos fornece que $\sum_n |a_n|^2 = ||\phi||_{L^2} < \infty$. Consequentemente se $n \neq 0$, então $a_n = a_{mn} = a_{m^2 n} = \ldots$ devemos ter $a_n = 0$. E portanto E_m é ergódica.

Exemplo 13.5. Para quase todo ponto (Lebesgue) em $[0,1)$ a frequência de $1's$ na expansão binária é $1/2$.

De fato, considere a função

$$T : [0,1) \to [0,1)$$

$$T(x) = 2x \; mod \; 1$$

então T preserva a medida de Lebesgue. Considere $x = a_1/2 + a_2/2^2 + \ldots$ que possui expansão binária única (os que não possuem são um conjunto enumerável, por isso os desconsideramos). Contamos a quantidade de $1's$ na expansão de x, definindo a funcão $f = \chi_{[1/2,1)}$ e notando que a soma $\sum_{k=1}^{n} f(T^k)$ fornece a quantidade de $1's$ que aparecem nos coeficiente $a_1, \ldots, a_n$. Portanto dividindo por n tomamos a média. O Teorema Ergódico implica

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(T^k) \to \int \chi_{[1/2,1)} = 1/2$$

Proposição 13.1. *Se (f,μ) é ergódica, então existe $B \subset X$, com $\mu(B) = 1$, tal que $\forall x \in B$*

$$\phi^+(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ T^j(x) = \int \phi \, d\mu, \; \forall \phi \in C^0(X).$$

Demonstração. Tome $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ um conjunto denso em $C^0(X)$. Seja B_k um conjunto de probabilidade total tal que $\phi_k^+(x) = \int \phi_k \, d\mu$ para todo $x \in B_k$. Defina

$$B := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k$$

Dado $\phi \in C^0(X)$ existe uma subsequêcia de $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ que converge uniformemente a ϕ. □

Proposição 13.2. *(f,μ) é ergódica $\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \; 1/n \sum_{j=0}^{n-1} \mu(A \cap f^{-j}(B)) = \mu(A)\mu(B) \; \forall A, B$ mensurável.*

Demonstração. ($\Rightarrow$): Sejam A e B mensuráveis. Defina $\phi = \chi_B$. Pelo Teorema 13.1 ϕ^+ é constante q.t.p. e $\phi^+ = \int \phi^+ d\mu = \int \phi d\mu = \mu(B)$. Defina $\psi = \chi_A$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mu(A \cap f^{-1}(B)) &= \lim_{n\to\infty} 1/n \sum_{j=0}^{n-1} \int \psi(x)\chi_{f^{-1}(B)}(x) d\mu(x) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \psi(x) 1/n \sum_{j=0}^{n-1} \chi_{f^{-1}(B)}(x) d\mu(x) = \\
\text{(Teo. Conver. Dominada)} &= \int \psi(x) \left(\lim_{n\to\infty} 1/n \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x)) \right) d\mu(x) = \\
&= \mu(B) \int \psi(x) d\mu(x) = \mu(B)\mu(A).
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$): Seja A mensurável tal que $f^{-1}(A) = A$, tome $B = A$ na hipótese:

$$\mu(A)\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(A \cap f^{-1}(A)) = \mu(A)$$

$$\Rightarrow \mu(A) = 0 \text{ ou } 1 \ \Rightarrow \text{f é ergódica.}$$

□

Proposição 13.3. *$f : M \to M$, μ, ν medidas f-invariantes. Se (f, μ) é ergódica e $\nu << \mu$, então $\nu = \mu$.*

Demonstração. Seja ϕ integrável então

$$\phi^+(x) = \int \phi d\mu \quad \mu\text{-q.t.p.}$$

sendo ν absolutamente contínua com respeito a μ

$$\phi^+(x) = \int \phi d\mu \quad \nu\text{-q.t.p.}$$

pelo Teorema Ergódico de Birkhoff

$$\int \phi d\nu = \int \phi^+ d\nu = \int (\int \phi d\mu) d\nu = \int \phi d\mu$$

logo $\nu = \mu$, já que vale a igualdade acima para toda função integrável ϕ. □

Definição 13.6. Seja X um conjunto convexo, dizemos que $p \in X$ é um *ponto extremal* se para toda combinação convexa $p = tx + (1-t)y$ com $x, y \in X$ e $t \in [0, 1]$, implica $t = 0$ ou $t = 1$.

Proposição 13.4. *Seja $\mu \in \mathcal{M}$, então*

$$(f,\mu) \text{ é ergódico} \Leftrightarrow \mu \text{ é ponto extremal de } \mathcal{M}.$$

Demonstração. $(\Rightarrow): \mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$, logo $\mu_1 << \mu$ e $\mu_2 << \mu$ portanto $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.

$(\Leftarrow)$: Suponha que (f,μ) não seja ergódico, então existe $A \subset M$ com $0 < \mu(A) < 1$, f-invariante. Definimos as seguintes medidas

$$\mu_1(E) = \frac{\mu(E \cap A)}{\mu(A)} \text{ e } \mu_2(E) = \frac{\mu(E \cap A^c)}{\mu(A^c)}$$

Assim vemos que μ não é extremal já que

$$\mu(E) = \mu(A)\mu_1(E) + \mu(A^c)\mu_2(E)$$

o que é um absurdo. □

Teorema 13.7. *Seja $f : M \to M$ contínua, M espaço métrico compacto. Então f admite uma medida de probabilidade (boreliana) ergódica.*

Demonstração. Seja $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ um conjunto denso de funções contínuas. Definamos os seguintes conjuntos

$$\mathfrak{M}_{i+1} = \left\{\mu \in \mathfrak{M}_i \;\middle|\; \int \phi_{i+1} d\mu = \max_{\nu \in \mathfrak{M}_i} \int \phi_{i+1} d\nu \right\}$$

onde $\mathfrak{M}_0 = \mathcal{M}(f)$.

Como a função $\nu \mapsto \int \phi_{i+1}$ é contínua, o conjunto $\mathfrak{M}_{i+1}$ é fechado, logo compacto. Como $\mathfrak{M}_{i+1}$ forma uma sequência encaixada de compactos temos

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{M}_i \neq \emptyset$$

Tome ν na interseção acima. Vejamos que ν é um ponto extremal e assim, pela proposição anterior, ergódico. Seja $\nu = \lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2$ com $\lambda \in [0,1]$ e $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}_0$. Assim $\int \phi_1 d\nu = \lambda \int \phi_1 d\nu_1 + (1-\lambda)\int \phi_1 d\nu_2$. Pois $\nu \in \mathfrak{M}_1$, $\int \phi_1 d\nu = \int \phi_1 d\nu_1 = \int \phi_1 d\nu_2$; caso contrário $\int \phi_1 \; d\nu < max\{\int \phi_1 \; d\nu_1, \int \phi_1 \; d\nu_1\}$. Assim temos $\nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{M}_1$.

Indutivamente, repetimos o argumento para ϕ_i e assim chegamos que

$$\int \phi_i d\nu_1 = \int \phi_i d\nu_2, \; \forall i \in \mathbb{N}$$

Portanto $\nu_1 = \nu_2$ implicando que ν é um ponto extremal. □

Exemplo 13.8. As medidas ergódicas não formam um conjunto fechado.

Olhemos para o shift $\sum_d$. Seja μ a medidade de Bernoulli $(1/d, \ldots, 1/d)$. Seja C_i uma enumeração dos cilindros. Tome um ponto $x \in \bigcap_i B(\chi_{C_i})$, onde $B(\chi_{C_i})$ é o conjunto de medida total para o qual as médias de Birkhoff convergem. $x = (\ldots, x_{-1}.x_1, x_2, \ldots)$. Defina o ponto periódico $y = [x_{-n}, \ldots, x_{-1}; x_1, \ldots, x_n, 0 \ldots, 0]$, são $2n$ zeros.

Defina μ_n como sendo a medida atômica equidistribuída na órbita de y_n. Sabemos que existe μ_n possui uma subsequência convergente $\{\mu_{n_i}\}$ que converge a uma medida, digamos, μ_0.

Pela escolha feita de x temos

$$\lim_{i\to\infty} \mu_{n_i}([l, a_1, \ldots, a_k]) = \frac{1}{2}\frac{1}{2^k}$$

Observer que os cilindros são abertos e fechados. Com isso vemos que

$$\lim_{i\to\infty} \mu_{n_i} = \mu_0 = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu_{\overline{0}}$$

Onde $\mu_{\overline{0}}$ é o delta de dirac no ponto $(\ldots 000.000 \ldots)$.

Teorema 13.9. *Seja ϕ integrável tal que $\int \phi d\mu = 0$ e (T, μ) ergódica. Defina $A = \{x \in X \mid \sum_{j=0}^{\infty} \phi \circ T^j(x) = \infty\}$, então $\mu(A) = 0$.*

Demonstração. Por absurdo, suponha $\mu(A) > 0$. Defina

$$h(x) = \inf_{n=1,2,\ldots} \{\sum_{j=0}^{n} \phi \circ T^j(x)\}.$$

É fácil ver que $|h(x)| \leq |\phi(x)|$, portanto h é integrável.

$$\begin{aligned} h(Tx) &= \inf_{n=1,2,\ldots} \{\sum_{j=0}^{n} \phi \circ T^{j+1}(x)\} = \inf_{n=2,\ldots} \{\sum_{j=0}^{n} \phi \circ T^j(x) - \phi(x)\} \\ &\geq \inf_{n=1,2,\ldots} \{\sum_{j=0}^{n} \phi \circ T^{j+1}(x) - \phi(x)\} = h(x) - \phi(x) \end{aligned}$$

Considere $A_n = \{x \in A \mid n \leq |h(x)| < n+1\}$, existe n_0 tal que $\mu(A_{n_0}) > 0$. Pelo teorema de recorrência de Poincaré $\widetilde{A}_{n_0} \subset A_{n_0}$ de medida total, tal que para todo $x \in \widetilde{A}_{n_0}$ existe sequência de inteiros n_k tais que $T^{n_k}(x) \in \widetilde{A}_{n_0}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Definamos a função $K(x) = \phi(x) + h(Tx) - h(x)$, pelo feito acima sabemos que $K \geq 0$. Por ergodicidade sabemos que $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} K(T^j(x)) \to \int K \, d\mu$, quase certamente. Para $x \in \widetilde{A}_{n_0}$

$$\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} K(T^j(x)) = \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} \phi(T^j(x)) + \frac{1}{n_k}(h(T^n(x)) - h(x)) \to 0 + 0 = 0$$

Portanto $\int K\ d\mu = 0 \Rightarrow \phi(x) = h(x) - h(T(x))$ quase certamente. E novamente para $x \in \widetilde{A}_{n_0}$

$$\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} \phi(T^j(x)) = \frac{1}{n_k}(h(T^n(x)) - h(x))$$

ou seja, $\sum_{j=0}^{n_k-1} \phi(T^j(x))$ é limitado, absurdo. □

Proposição 13.5. *Considere $f : M \to M$ uma transformação que preserva a medida boreliana μ, então são equivalente:*

(i) f é ergódica;

(ii) Para todo $A \in \mathcal{B}(M)$ com $\mu(A) > 0$, então $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(A)) = 1$;

(iii) Para todo $A, B \in \mathcal{B}(M)$ com $\mu(A) > 0$ e $\mu(B) > 0$, então existe $n > 0$ tal que $\mu(f^{-n}(A) \cap B) > 0$.

Demonstração.
- $(i) \Rightarrow (ii)$: Como $f^{-1}(\cup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(A)) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(A) \subset \cup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(A)$ e $\mu(\cup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(A)) > 0$ dado que contém o conjunto A então pelo Teorema (13.1) $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(A)) = 1$.
- $(ii) \Rightarrow (iii)$: Como $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(A)) = 1$ então $\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(A) \bigcap B$ tem medida total, e portanto deve haver $n > 0$ como tal que $\mu(f^{-n}(A) \cap B) > 0$.
- $(iii) \Rightarrow (i)$: Por absurdo, suponha que exista A mensurável invariante tal que $0 < \mu(A) < 1$ então tomando $B = A^c$ na hipótese temos que existe $n > 0$ tal que $0 < \mu(f^{-n}(A) \cap B) = \mu(A \cap B) = \mu(\emptyset) = 0$, absurdo.

□

Definição 13.10. Dizemos que $f : M \to M$ é unicamente ergódica se f admite uma única probabilidade invariante.

Teorema 13.11. *Sejam $f : M \to M$ contínua e M espaço métrico compacto. São equivalentes*

a) $1/n \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^j$ converge uniformemente a uma constante $\forall \phi \in C^0(M)$;

b) $1/n \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^j$ converge pontualmente a uma constante $\forall \phi \in C^0(M)$;

c) Existe $\mu \in \mathcal{M}(f)$ *f-invariante tal que* $\forall \phi \in C^0(M)$ $1/n \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^j$ *converge pontualmente a* $\int \phi d\mu$*;*

d) f *é unicamente ergódica.*

Demonstração. $a) \Rightarrow b)$: Trivial.

$b) \Rightarrow c)$: Definamos a seguinte função

$$\begin{array}{rcl} B : C^0(M) & \to & \mathbb{R} \\ \phi & \mapsto & \phi^+ \end{array}$$

que pela hipótese está bem definida. Note que B é linear, contínua (já que $||B|| \leq 1$) e se $\phi \geq 0 \Rightarrow B(\phi) \geq 0$. O Teorema de Representação de Riez garante que existe probabilidade μ tal que

$$B(\phi) = \int \phi d\mu, \quad \forall \phi \in C^0(M)$$

Resta checar que esta medida é f-invariante, mas observe que

$$\int \phi \circ f d\mu = B(\phi \circ f) = B(\phi) = \int \phi d\mu \Rightarrow \mu \text{ é f-invariante.}$$

$c) \Rightarrow d)$: Seja ν outra medida invariante. Como

$$1/n \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x)) \to \int \phi d\mu$$

integrando ambos os lados com respeito a ν obtemos

$$\begin{tikzcd} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \int \phi \circ f^j(x) d\nu \arrow[r] \arrow[d, "="] & \int (\int \phi d\mu) d\nu \arrow[d, "="] \\ \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \int \phi d\nu & \int \phi d\mu \end{tikzcd}$$

obtemos $\int \phi d\nu = \int \phi d\mu \Rightarrow \nu = \mu$.

$d) \Rightarrow a)$: Façamos por absurdo. Então existem ϕ integrável, $\epsilon > 0$, uma sequência de pontos x_n, inteiros k_n (estritamente crescentes) tais que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k_n - 1} \phi(f^j(x_n)) - \phi d\mu \right| \geq \epsilon$$

Seja μ a única medida invariante da hipótese. Considere agora a sequência de medidas ν_n definidas por

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k_n - 1} \delta_{f^j(x_n)}$$

note que $\int f\, d\nu_n = 1/n \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x_n))$. Portanto a relação anterior fornece

$$\left| \int \phi d\nu_n - \int \phi d\mu \right| \geq \epsilon$$

Tome ν como sendo um ponto de acumulação da sequência ν_n. ν é f-invariante e passando o limite, a subsequência, obtemos $| \int \phi d\nu - \int \phi d\mu| \geq \epsilon$ o que é absurdo, dado que $\nu = \mu$.

$\square$

Definição 13.12. Seja μ uma medida boreliana em um espaço métrico M, definimos o suporte de μ por

$$supp\ \mu := \{x \in M \mid \mu(U) > 0 \text{ sempre que } x \in U \text{ e } U \text{ aberto}\}.$$

Proposição 13.6. *Seja $T : X \to X$ uma função contínua e X um espaço métrico compacto. Então*

(i) Se μ é ergódica, então $T_{|supp\ \mu}$ tem órbita densa;

(ii) Se μ é unicamente ergódica, então supp μ é um conjunto minimal.

Demonstração. Observe que $T(supp\ \mu) \subset supp\ \mu$ sempre que μ for invariante por f.

(i): Basta provar que dados dois abertos de *supp* μ A, B com medida positiva se intersectam, todavia segue direto da Proposição (13.5).

(ii): Suponha que exista $K \subset supp\ \mu$ compacto invariante propriamente contido em *supp* μ. Portanto sabemos que existe uma medida invariante ν para $T : K \to K$, e que pode ser olhada como uma medida em todo M. Encontramos assim uma medida $\nu \neq \mu$ o que implica que (T, μ) não é unicamente ergódica. Absurdo. $\square$

Definição 13.13. Sejam $f \in C^0(X)$ e μ uma medida invariante por f. Dizemos que (f, μ) é *misturadora* ou *mixing* se $\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap f^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B)$.

Exemplo 13.14. Exemplos que satisfazem uma condição e não outra.

- **Unicamente ergódica, mas não é minimal.**
  $f : S^1 \to S^1$, $f(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\pi i\theta^2}$
- **Unicamente ergódica, mas não misturadora.**

  Pegue a mesma função acima.

- **Ergódica, mas não misturadora.**

  Considere a rotação irracional $R_\alpha : S^1 \to S^1$. Pegue dois intervalos abertos A e B pequenos (menores que metade do diametro de S^1 por exemplo), existe $n_i \to \infty$ tal que $A \cap R_\alpha^{n_i}(B) = \emptyset$. Consequentemente não pode ser misturadora.

- **Topologicamente mixing, mas não é mixing.**

  Considere o shift de Bernoulli e tome duas medidas de Bernoulli distintas, μ_1 e μ_2. Sabemos que o shift é topologicamente mixing e preserva a medida $\mu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$. Se μ fosse mixing, então seria ergódica, entretanto não pode ser ergódica dado que é soma não trivial de medidas.

Exemplo 13.15 (Teorema de Kac)**.** Considere (T, μ) ergódica. Seja $A \subset X$ de medida positiva, defina a função tempo de primeiro retorno, $n : A \to \mathbb{N}$ por $n(x) = min\{i \in \mathbb{N} \mid T^i(x) \in A\}$.

Afirmação: $\displaystyle\int_A n(x)\, d\mu = 1.$

Defina

$$A_k := \{x \in A \mid n(x) = k\}$$

$$B_k := \{x \in X \mid T^j(x) \notin A,\ j = 1, \ldots, k-1;\ T^k(x) \in A\}$$

pelo Teorema de Recorrência $A = \bigcap_{k\geq 1} A_k$ q.t.p., logo $\sum_{k\geq 1} \mu(A_k) = \mu(A)$. Vale também que $X = \bigcap_{k\geq 1} B_k$ q.t.p. e esta união é disjunta. Como $A \subset \bigcap_{n\geq 1} T^{-n}A \subset \bigcap_{k\geq 1} B_k$.

$$\int_A n(x)\, d\mu = \sum_{k}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \mu(A_n) \right)$$

Afirmação:$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(B_k)$.

Provemos por indução. Para $k = 1$, $B_1 = T^{-1}A$, então $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) = \mu(A) = \mu(B_1)$. Suponhamos que vale para k e provemos para $k+1$.

$$T^{-1}B_k = B_{k+1} \bigcup T^{-1}A_k$$

a união acima é disjunta, isto pois

$$T^{-1}A_k = T^{-1}B_k \bigcap T^{-1}A,\ B_{k+1} = T^{-1}B_k \bigcap (T^{-1}A)^c$$

Por conseguinte, $\mu(T^{-1}B_k) = \mu(B_k) = \mu(B_{k+1}) + \mu(T^{-1}A_k) = \mu(B_{k+1}) + \mu(A_k)$. Da hipotese indutiva, $\mu(B_{k+1}) = \mu(B_k) - \mu(A_k) = \displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Shift de Bernoulli

$\sum_d := \{1, \ldots, d\}^{\mathbb{Z}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid x_n \in \{1, \ldots, d\}\}$.

Dados $a_n, \ldots, a_{n+m} \in \{1, \ldots, d\}$ chamamos de *cilindros* os conjuntos definidos por:

$$[n; a_n, \ldots, a_{n+m}] := \{(x_n)_{n\mathbb{Z}} \mid x_n = a_n,\ x_{n+1} = a_{n+1}, \ldots, x_{n+m} = a_{n+m}\}$$

Considere em $\sum_d$ a σ-álgebra β gerada pelos cilindros. Definimos a *medida de Bernoulli* μ associada a $p_1, \ldots, p_d$ onde $p_1 + \ldots + p_d = 1$, de forma que

$$\mu([n; a_n, \ldots, a_{n+m}]) = p_{a_n} \ldots p_{a_{n+m}}$$

ou equivalentemente $\mu = \nu^{\mathbb{Z}}$, isto é a medida produto onde ν é a medida em $\{1, \ldots, d\}$ definida por $\nu(\{i\}) = p_i$.

Definimos agora a função *shift* (à esquerda)

$$\begin{aligned} \sigma : \sum &\rightarrow \sum \\ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} &\mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

onde $\sum = \sum_d$.

Teorema 13.16. *Na notação acima, σ preserva a medida μ.*

Demonstração. σ preserva a medida dos cilindros, pois

$$\sigma^1([n; a_n, \ldots, a_{n+m}]) = [n + 1; a_n, \ldots, a_{n+m}].$$

Os cilindros formam uma álgebra e o conjunto abaixo

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B} \mid \mu(\sigma^{-1}(A) = \mu(A))\}$$

é uma classe monótona que os contém, portanto pelo Teorema de Classe Montótona σ preserva μ. $\square$

Teorema 13.17. $\forall A, B \in \mathcal{B},\ \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap \sigma^{-m}(B)) = \mu(A)\mu(B)$.

Demonstração. Basta provar o resultado para A, B cilindros. $A = [n; a_n, \ldots, a_{n+m}]$ e $B = [p; b_p, \ldots, a_{p+q}]$. $\sigma^{-m}(B) = [p + m; b_p, \ldots, b_{p+q}]$, seja m tal que $p + m + q \geq n + r$. Então temos a seguinte união disjunta

$$A \cap \sigma^{-m}(B) = \dot{\bigcup_{c_1,\ldots,c_s \in \{1,\ldots,d\}}} [n; a_n, \ldots, a_{n+m}, c_1, \ldots, c_s, b_p, \ldots, a_{p+q}]$$

onde $s = p + m - n - r - 1$. Suponhamos, para simplificar a notação, que $s = 2$.

$$A \cap \sigma^{-m}(B) = \bigcup_{i=1}^{d} \bigcup_{j=1}^{d} [n; a_n, \ldots, a_{n+m}, c_i, c_j, b_p, \ldots, a_{p+q}]$$

Consequentemente

$$
\begin{aligned}
\mu(A \cap \sigma^{-m}(B)) &= \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \mu([n; a_n, \ldots, a_{n+m}, c_i, c_j, b_p, \ldots, a_{p+q}]) \\
&= \mu(A)\mu(B) \sum_i p_i \sum_j p_j = \mu(A)\mu(B).
\end{aligned}
$$

□

Corolário 13.1. (σ, μ) *é misturadora, portanto ergódica.*

Exercícios

Exercício 13.1. (a) supp μ é fechado;

(b) $\mu(X \backslash supp\ \mu) = 0$;

(c) Se $A \in \mathcal{B}$ tem medida total, então A é denso em *supp* μ.

Exercício 13.2. Sejam (T, μ) ergódica e ϕ integrável.

- $A = \{x \mid \sum_{j=0}^{\infty} \phi(T^j(x)) = \infty\}$. Se $\mu(A) > 0 \Rightarrow \int \phi\, d\mu > 0$.
- $B = \{x \mid \sum_{j=0}^{\infty} \phi(T^j(x)) = -\infty\}$. Se $\mu(B) > 0 \Rightarrow \int \phi\, d\mu < 0$.

Exercício 13.3. Prove que a rotação irracional é unicamente ergódica.

Exercício 13.4. Sejam $T : X \to X$ mensurável, X métrico compacto e μ probabilidade boreliana preservada por f tal que $\mu(U) > 0$ para todo U aberto. Prove que $\mu(\{x \in X \mid \{T^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso em $X\}) = 1$.

Exercício 13.5. Sejam $T : X \to X$, X espaço métrico e μ probabilidade invariante. Se *supp* $\mu = X$, então todo ponto é não-errante e quase todo ponto é recorrente.

Exercício 13.6. Se ν e μ são medidas ergódicas distintas, então elas são mutualmente singulares.

Exercício 13.7. Vale a Proposição 13.1 considerando ϕ no conjunto das integráveis?

Exercício 13.8. Dê um exemplo em que $T_i : X_i \to X_i$, $i = 1, 2$, seja ergódica, mas $T = T_1 \times T_2$ não seja ergódica com a medida produto.

Exercício 13.9. Dê um exemplo em que (T, μ) seja ergódica, mas (T^2, μ) não seja.

Exercício 13.10. Suponha $k \geq 2$.

a) Se (T^k, μ) é ergódica, então (T, μ) é ergódica;

b) Se (T^k, μ) é misturadora se, e somente se, (T, μ) é misturadora.

Exercício 13.11. As medidas ergódicas no shift de Bernoulli formam um conjunto denso no conjunto das medidas invariantes pelo shift.

14 Desintegração de medidas

Seja $(M, \mu, \mathcal{B})$ um espaço de probabilidade, onde M é um espaço métrico compacto, μ uma probabilidade e $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de borel. Dada uma partição $\mathcal{P}$ de M por conjuntos mensuráveis, associamos o espaço mensurável

$$(\mathcal{P}, \widetilde{\mu}, \widetilde{\mathcal{B}})$$

da seguinte maneira. Seja $\pi : M \to \mathcal{P}$ a projeção canônica que associa um ponto de M a partição que o contém. Então definimos $\widetilde{\mu} := \pi_* \mu$ e $\widetilde{\mathcal{B}} := \pi_* \mathcal{B}$.

Definição 14.1. Dada uma partição $\mathcal{P}$. Uma família $\{\mu_P\}_{p \in \mathcal{P}}$ é um *sistema de medidas condicionais* para μ (com respeito a $\mathcal{P}$) se

i) Dada $\phi \in C^0(M)$, então $P \mapsto \int \phi \mu_P$ é mensurável;

ii) $\mu_P(P) = 1$ $\widehat{\mu}$-q.t.p.;

iii) Se $\phi \in C^0(M)$, então $\displaystyle\int_M \phi d\mu = \int_{\mathcal{P}} (\int_P \phi d\mu_P) d\widetilde{\mu}$

Observe que as condições *i)* e *iii)* também valem para ϕ limitada pelo teorema da convergência dominada. Quando bem entendida a partição que estamos trabalhando, dizemos também que a família $\{\mu_P\}$ *desintegra* a medida μ.

Proposição 14.1. *Se $\{\mu_P\}$ e $\{\nu_P\}$ são medidas condicionais que desintegram μ, então $\mu_P = \nu_P$ $\widetilde{\mu}$-q.t.p.*

Demonstração. Suponha por absurdo que exista $\mathcal{Q} \subset \widetilde{\mathcal{B}}$ com $\widetilde{\mu}(\mathcal{Q}) > 0$ tal que $\mu_P \neq \nu_P$ para todo $P \in \mathcal{Q}$.

Afirmação: Existe $\mathcal{Q}_0 \subset \mathcal{Q}$ com $\widetilde{\mu}(\mathcal{Q}) > 0$ e $\phi \in C^0(M)$ tal que $\int_P d\mu_P > \int_P d\nu_P$ para todo $P \in \mathcal{Q}_0$ ou $\int_P d\mu_P < \int_P d\nu_P$ para todo $P \in \mathcal{Q}_0$.

De fato, seja $\{\phi_k\}$ um conjunto denseo enumerável de $C^0(M)$. Defina os conjuntos

$$A_i = \{P \in \mathcal{Q} \mid \int_P d\mu_P \neq \int_P d\nu_P\}$$

Como $\widetilde{\mu}(\cup_i A_i) = \widetilde{\mu}(Q) > 0$, existe i_0 tal que $\widetilde{\mu}(A_{i_0})$ com $\widetilde{\mu}(Q_{i_0}) > 0$. E a afirmação segue.

Sejam ϕ e $\mathcal{Q}$ como na afirmação.

$$\begin{aligned} \int \phi \chi_{\pi^{-1}(\mathcal{Q})} d\mu &= \int (\int \phi \chi_{\pi^{-1}(\mathcal{Q})} d\mu_P) d\widetilde{\mu}(P) = \int_{\mathcal{Q}} (\int \phi d\mu_P) d\widetilde{\mu}(P) \\ &> \int_{\mathcal{Q}} (\int \phi d\nu_P) d\widetilde{\mu}(P) = \int \phi \chi_{\pi^{-1}(\mathcal{Q})} d\mu \end{aligned}$$

Chegando assim a um absurdo. $\square$

Corolário 14.1. *Se $T : M \to M$ preserva uma probabilidade μ, então preserva μ_P $\widetilde{\mu}$-q.t.p.*

Demonstração. Basta ver que $\{T_*\mu_P\}_{P\in\mathcal{P}}$ também é uma desintegração de μ. □

Definição 14.2. Dizemos que a partição $\mathcal{P}$ é mensurável se existe uma família de borelianos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tais que

$$\mathcal{P} = \{A_1, A_1^c\} \vee \{A_2, A_2^c\} \vee \ldots \operatorname{mod} 0$$

Teorema 14.3 (Desintegração de Rokhlin [16])**.** *Seja $\mathcal{P}$ uma partição mensurável do compacto M e μ uma probabilidade boreliana. Então existe uma desintegração de μ.*

Demonstração. Definimos a partição $\mathcal{P}_n := \{A_1, A_1^c\} \vee \ldots \vee \{A_n, A_n^c\}$. Dado $z \in M$ denotamos por $P_n(z)$ ao elemento da partição $\mathcal{P}_n$ que contém z. Dada uma função limitada $\psi : M \to \mathbb{R}$ definimos $\widetilde{\psi}_n : M \to \mathbb{R}$ por

$$\widetilde{\psi}_n(z) = \begin{cases} 1/\mu(P_n(z)) \int_{P_n(z)} \psi d\mu & \text{se } \mu(P_n(z)) > 0 \\ 0 & \text{se } \mu(P_n(z)) = 0 \end{cases}$$

Lema 14.1. *Existe $F = F(\psi) \subset M$ com $\mu(F) = 1$ tal que existe o limite*

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\psi}_n(z), \ \forall z \in F$$

Demonstração. Sejam $\alpha < \beta$ números reais, definimos o conjunto

$$S(\alpha, \beta) = \{z \in M \mid lim\ inf\ \psi_n(z) < \alpha < \beta < lim\ sup\ \psi_n(z)\}$$

Basta provar que $\mu(S(\alpha, \beta)) = 0$. De fato, defina o conjunto $A := \bigcap_{q,p\in\mathbb{Q}} S(q, p)$, então definimos $F := A^c$.

Denotemos $S(\alpha, \beta)$ por S. A cada $z \in S$ associamos uma sequência de inteiros $a_z(1) < b_z(1) < a_z(2) < b_z(2) \ldots$ de modo que

$$\psi_{a_z(i)}(z) < \alpha \ \text{ e } \ \psi_{b_z(i)}(z) > \beta$$

Definamos os conjuntos

$$A_i = \bigcup_{z\in S} P_{a_z(i)}(z), \ B_i = \bigcup_{z\in S} P_{b_z(i)}(z)$$

Os conjuntos A_i e B_i são mensuráveis, pois podem ser olhados como uma união enumerável. Isto porque $\{a_z(i)\}_{z\in S, i\in\mathbb{N}}$ e $\{b_z(i)\}_{z\in S, i\in\mathbb{N}}$ são enumeráveis dado que são subconjuntos dos naturais. É fácil ver $S \subset A_{i+1} \subset B_i \subset A_i$, assim defina o conjunto $\widetilde{S} := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Observe que os conjuntos A_i e B_i podem ser olhados como união de conjuntos disjuntos, isto porque pela partição ou dois conjuntos têm interseção vazia ou um está um contido no outro. Com esta observação fazemos as somas abaixo usando olhando apenas para esta união disjunta:

$$\begin{aligned} \beta\mu(B_i) &= \sum_{P_{b_z(i)}} \mu(P_{b_z(i)}(z))\beta \leq \int_{B_i} \psi d\mu \leq \\ &\leq \int_{A_i} \psi d\mu = \sum_{P_{a_z(i)}} \int_{P_{a_z(i)}} \leq \sum_{P_{a_z(i)}} \mu(P_{a_z(i)}(z))\alpha \leq \alpha\mu(A_i) \end{aligned}$$

Mandando i a infinito temos que $\beta\mu(\widetilde{S}) \leq \alpha\mu(\widetilde{S})$ e portanto $\mu(\widetilde{S}) = 0$ pois $\beta > \alpha$. Logo $\mu(S) \leq \mu(\widetilde{S}) = 0$ como queríamos. $\square$

Seja $\{\phi(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ um conjunto enumerável denso em $C^0(M)$. Pelo lema acima, considere o seguinte conjunto de massa total

$$\mathcal{F} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F(\phi(n))$$

Lema 14.2. *Para toda φ contínua existe o limite de $\widetilde{\varphi}_n(z)$, denotado por $\widetilde{\varphi}(z)$ para todo $z \in \mathcal{F}$.*

Demonstração. Provemos que $\widetilde{\varphi}_n(z)$ é uma sequência de Cauchy. Dado $\epsilon > 0$, seja $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(\alpha)$ $\epsilon/3$-aproxima φ. Sendo $\widetilde{\phi(\alpha)}_n$ cauchy, seja n_0 tal que para $n, m \geq n_0$ tenhamos $|\widetilde{\phi(\alpha)}_n(z) - \widetilde{\phi(\alpha)}_m(z)| < \epsilon/3$. Este mesmo n_0 tomamos para a seuquência $\widetilde{\varphi}_n$

$$\begin{aligned} |\widetilde{\varphi}_n(z) - \widetilde{\varphi}_m(z)| &\leq |\widetilde{\varphi}_n(z) - \widetilde{\phi(\alpha)}_n(z)| + |\widetilde{\phi(\alpha)}_n(z) - \widetilde{\phi(\alpha)}_m(z)| \\ &+ |\widetilde{\phi(\alpha)}_m(z) - \widetilde{\varphi}_m(z)| \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

$\square$

Fixado $P \in \mathcal{P}$ e φ contínua, então $\widetilde{\varphi}$ é constante em P, isto porque ela é limite de funções constantes em P. Assim, fica bem definida a função

$$\begin{aligned} C^0(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \widetilde{\varphi}(P) \end{aligned}$$

Podemos aplicar o teorema de Riez a essa função, portanto existe uma medida μ_P tal que $\widetilde{\varphi}(P) = \int \varphi d\mu_P$. Temos também

$$\int \varphi d\mu = \sum_{\mu(P_n)>0} \int_{P_n} \varphi d\mu = \sum_{\mu(P_n)>0} \int_{P_n} \mu(P_n)\widetilde{\varphi}_n d\mu = \int \widetilde{\varphi}_n d\mu$$

Aplicando o limite quando n vai a infinito obtemos

$$\int \varphi d\mu = \int \widetilde{\varphi} d\mu = \int \widetilde{\varphi}(P) d\widetilde{\mu}(P) = \int (\int \varphi d\mu_P) d\widetilde{\mu}(P)$$

Por fim, vejamos que para $\mu(P) > 0$ então $\mu_P(P) = 1$. A última igualdade abaixo vem quando n é grande.

$$\mu_P(P) = \int \chi_P d\mu_P = \lim_{n\to\infty} 1/\mu(P_n) \int_{P_n} \chi_P d\mu = 1$$

Com isso provamos o teorema. □

14.1 Decomposição ergódica

Seja $f : M \to M$ um transformação que preserva a medida μ. Defina

$$B = \{z \in M \mid \text{ existe } \phi^+(z),\ \forall \phi \in C^0(M)\}$$

Lembre que $\phi^+(z) = \lim_{n\to\infty} 1/n \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^j(z)$. Defina a seguinte classe de equivalência em B, $x \sim y$ se, e somente se, $\phi^+(x) = \phi^+(y),\ \forall \phi \in C^0(M)$. Defina a partição $\mathcal{P}_B$ como as classes de equivalências em B união $M \backslash B$.

Teorema 14.4 (Desintegração ergódica)**.** *Seja $f : M \to M$ e μ uma probabilidade f-invariante, então*

- *$\mathcal{P}_B$ é uma partição mensurável;*
- *Aplicando o Teorema 14.3 a $\mathcal{P}_B$ e μ tem-se que μ_P são invariantes e ergódicas $\widetilde{\mu}$-q.t.p.*
- *Seja $x \in P$ e $P \in \mathcal{P}_B$, então $\eta_x = \mu_P$ $\widetilde{\mu}$-q.t.p.*
  onde $\eta_x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)}$

Demonstração. A demonstração está quebrada nos três lemas abaixo.

Lema 14.3. *$\mathcal{P}_B$ é uma partição mensurável.*

Demonstração. Tomemos $\{\phi_n\}$ um conjunto enumerável denso em $C^0(M)$ e $\{q_m\}$ conjunto enumerável denso na reta. Defina o conjunto

$$A_{n,m} = \{x \in B \mid \phi_n^+(x) > q_m\}$$

Considere a partição $\mathcal{P} = \bigvee_{n,m} A_{n,m}$. É fácil ver que esta partição é a que procuramos. □

Lema 14.4. *Aplicando o Teorema 14.3 a $\mathcal{P}_B$ e μ tem-se que μ_P são invariantes e ergódicas $\widetilde{\mu}$-q.t.p.*

Demonstração. Primeiramente vejamos que μ_P é invariante. Da demonstração do Teorema 14.3 no nosso caso agora temos que $f^{-1}(P_n) = P_n$, e usando que μ é f-invariante, dada ϕ contínua:

$$\begin{aligned}\int \phi d\mu_P &= \widetilde{\phi}(P) = lim\ \widetilde{\phi}_n(z \in P) = lim\ \mu(P_n) \int_{P_n} \phi d\mu \\ &= lim\ \mu(P_n) \int_{P_n} \phi d\mu = \int \phi \circ f d\mu_P\end{aligned}$$

Por fim, μ_P é ergódica pois por construção da partição as médias de Birkhoff são constantes para quase todo ponto. □

Lema 14.5. *Seja $x \in P$ e $P \in \mathcal{P}_B$, então $\eta_x = \mu_P$ $\widetilde{\mu}$-q.t.p.*

Demonstração. O limite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)}$ existe, dado que toda subsequência convergente converge a um mesmo valor. Dado ϕ contínua:

$$\int \phi d\eta_x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^j(x) = \int \phi d\mu_P$$

O que prova a igualdade entre as medidas. □

O teorema segue do feito acima. □

Uma aplicação direta da decomposição ergódica é que toda função mensurável num espaço métrico compacto admite uma medida ergódica.

Exercícios

Exercício 14.1. Sejam R_α uma rotação racional no círculo e λ a medida de lebesgue no círculo.

a) (R_α, λ) não é ergódica;

b) Fazer a decomposição ergódica de λ.

Exercício 14.2. Exemplo de sistema em que haja ininito enumerável na decomposição ergódica.

Exercício 14.3. Considerando a rotação irracional no círculo, particione o círculo por meio das órbitas. Mostre que esta partição não é mensurável.

Exercício 14.4. T é unicamente ergódica se, e somente se, existir uma única medida ergódica para T.

15 Entropia

15.1 Entropia Métrica

Um partição $\mathcal{P}$, é uma coleção $\mathcal{P} = \{A_i\}_{i=1}^k$ de conjuntos mensuráveis, tais que: $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$ e $X = \bigcap_{i=1}^k A_i$.

Definição 15.1. Sejam uma partição $\mathcal{P}$ e uma probabilidade μ. Definimos a entropia $h_\mu(\mathcal{P})$, da partição $\mathcal{P}$ com respeito a μ, por:

$$h_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)\ log\ \mu(A_i)$$

Definição 15.2. Sejam $\mathcal{P} = \{A_i\}_{i=1}^k$ e $\mathcal{P} = \{B_j\}_{j=1}^l$ duas particções de X. Dizemos que $\mathcal{P}$ refina $\mathcal{Q}$, ou que $\mathcal{P}$ é mais fina que $\mathcal{Q}$, denotado por

$$\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$$

se dado B_j existe A_i tal que $B_j \subset A_i$.

Proposição 15.1. *A função $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & se\ x = 0 \\ x\ logx & se\ x \neq 0 \end{cases} \tag{5}$$

é estritamente convexa.

Demonstração. $\phi'(x) = 1 + log\ x$ e $\phi''(x) = 1/x > 0$. □

Corolário 15.1. *Se $\mathcal{P} = \{A_i\}_{i=1}^k$, então $h_\mu(\mathcal{P}) \leq log\ k$. E $h_\mu(\mathcal{P}) = log\ k$ se, e somente se, $\mu(A_i) = 1/k$.*

Demonstração. Temos

$$-\phi(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i) \geq -\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \phi(x_i)$$

se $x_i \in [0, \infty)$, α_i positivo e $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$; a igualdade ocorre se, e somente se, os x_i's com $\alpha_i \neq 0$ são iguais.

Logo, o corolário segue tomando $\alpha_i = 1/k$ e $x_i = \mu(A_i)$. □

Definição 15.3. Dada duas partições $\mathcal{P} = \{A_i\}_{i=1}^k$ e $\mathcal{Q} = \{B_j\}_{j=1}^l$, definimos $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ por

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{A_i \cap B_j \subset X \mid i \in \{1, \ldots, k\}, j \in \{1, \ldots, l\}\}$$

Note que $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ refina $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$.

Seja $f : X \to X$ mensurável e $\mathcal{P} = \{A_i\}$ uma partição. Definimos

$$\mathcal{P}^n = \mathcal{P} \vee f^{-1}\mathcal{P} \vee \ldots \vee f^{-(n-1)}\mathcal{P}$$

onde $f^{-k}\mathcal{P} = \{f^{-k}(A_i)\}$.

Observação 15.1.
- Fixado a aplicação T, a função entropia $\mu \mapsto h_\mu(T)$ é contínua superiormente (Vide Teorema 8.2 em [17].)
- Se T for um difeomorfismo C^∞, então a função entropia é contínua.

15.2 Entropia Topológica

Teorema 15.4. *Seja X um espaço compacto e $T : X \to X$.*

a) Se T for um homemorfismo expansivo com constante de expansividade δ e $\gamma = \{A_1, \ldots, A_r\}$ uma cobertura finita (não necessariamente aberta) de X com diam$(A_j) \leq \delta$, então diam$(\vee_{j=-n}^{n} T^{-j}\gamma) \to 0$ quando $n \to \infty$.

b) Se T for aplicação contínua positivamente expansiva com constante de expansividade δ e $\gamma = \{A_1, \ldots, A_r\}$ uma cobertura finita (não necessariamente aberta) de X com diam$(A_j) \leq \delta$, então diam$(\vee_{j=0}^{n} T^{-j}\gamma) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Demonstração. Provemos o item a). Por absurdo, suponha que existam $\epsilon > 0$, $n_i \in \mathbb{N}$, $x_i, y_i \in P_i \in \vee_{j=-n}^{n} T^{-j}\gamma$ talque $d(x_i, y_i) > \epsilon$. Por compacidade, podemos supor que x_i e y_i convergem a x_0 e y_0. Por continuidade $d(x_0, y_0) > \epsilon$ e $d(T^j(x_0), T^j(y_0)) \leq \delta$. Absurdo.

A demosntração do item b) é análoga. $\square$

Teorema 15.5. *Seja $T : X \to X$ um homeomorfismo expansivo ou aplicação positivamente expansiva cuja constante de expansividade é δ; se $\alpha = \{A_1, \ldots, A_r\}$ cobertura aberta de diamento menor que δ, então $h(T) = h(T, \alpha)$;*

Demonstração. Seja T um homeomorfismo. Dado β uma cobertura aberta seja l o número de lebesgue da cobertura β. Seja N grande o suficiente para que $\beta < \bigvee_{j=-N}^{N} T^{-j}\alpha$.

$$
\begin{aligned}
h(T,\beta) &\leq h(T, \bigvee_{j=-N}^{N} T^{-j}\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\bigvee_{j=-N}^{N} T^{-j}\alpha) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{j=-N}^{N+n-1} T^{-j}\alpha\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{j=0}^{2N+n-1} T^{-j}\alpha\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2N+n-1}{n} \frac{1}{2N+n-1} H\left(\bigvee_{j=0}^{2N+n-1} T^{-j}\alpha\right) \\
&= h(T,\alpha).
\end{aligned}
$$

E segue o resultado para homeomorfismo. No caso de aplicação positivamente expansora tome N de forma que $\beta < \bigvee_{j=0}^{N} T^{-j}\alpha$.

□

Teorema 15.6. *A entropia topológica do shift uni e bilatera de k símbolos é igual a $log(k)$.*

Demonstração. O shift é expansivo com constante de expansividade igual a 1/2. Tomemos a cobertura aberta $\alpha = \{A_1, \ldots, A_k\}$ onde $A_j = \{\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \mid x_0 = j\}$ no caso de shift bilateral e $A_j = \{\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mid x_0 = j\}$ no caso unilateral.

Assim

$$
\begin{aligned}
h(T) &= h(T,\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} log\ N(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} log(k^n) = log(k)
\end{aligned}
$$

□

Corolário 15.2. *Seja $Y \subset \sum_d$ um conjunto fechado e invariante pelo shift, $\sigma(Y) = Y$. Então*

$$h(T|_Y) = \lim_{n\to\infty} (1/n) log \theta_n(Y).$$

Onde $\theta_n(Y)$ é o número de cilindros de tamanho n em Y que não sejam vazios.

Demonstração. $\boxed{\text{Ver walters pagina 178}}$

$\boxed{\text{Ver walters pagina 178}}$ □

Exemplo 15.7. Mostremos agora que para todo número real positivo existe um sistema cuja entropia tológica atinge este número.

$\boxed{\text{Ver walters pagina 178}}$

$\boxed{\text{Ver walters pagina 178}}$

Teorema 15.8. *Seja $T : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo do círculo, então $h(T) = 0$.*

Demonstração. Por continuidade uniforme, existe $\beta < 1/4$ positivo tal que se $d(x,y) < \beta$ então $d(T^{-1}(x), T^{-1}(y)) < 1/4$.

Seja $\epsilon < \beta$. Provemos que existe $\alpha > 0$ tal que $r_n(\epsilon, S^1) \leq n\alpha$.

Vejamos como escolher α. Seja $Z \subset S^1$ um conjunto finito em S^1 tal qoe todo ponto do círculo dista ϵ de algum ponto de Z. Definamos α por

$$\alpha := \#Z.$$

Onde $\#Z$ siginifica a cardinalidade de Z. Por hipótese indutiva $r_n(\epsilon, S^1)$ $\leq n\alpha$. Olhemos para a etapa $n+1$. Seja Y um conjunto (n, ϵ)-spanning de cardinalidade $r_n(\epsilon, S^1)$. Definamos o conjunto

$$A = Y \cup T^{-n}Z.$$

Note que $\#A \leq r_n(\epsilon, S^1) + \alpha \leq (n+1)\alpha$. Para obtermos o que queremos basta checar que A é um conjunto $(n+1, \epsilon)$-spanning.

Dado $x \in S^1$, existe $y \in Y$ tal que $d(T^i x, T^i y) \leq \epsilon$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Se $d(T^n x, T^n y) \leq \epsilon$ não há nada para fazer. Suponha então $d(T^n x, T^n y) > \epsilon$.

Escolha $z \in T^{-n}Z$ tal que $d(T^n x, T^n y) \leq \epsilon$ e $T^{-n+1}z$ pertença ao intervalo de extremos $T^{n-1}x$ e $T^{n-1}y$ de menor comprimento (logo menos que ϵ).

Afirmo que $d(T^{n-1}x, T^{n-1}z) \leq \epsilon \Rightarrow d(T^{n-2}x, T^{n-2}z) \leq \epsilon$. Pois T^{n-2} pertence ao intervalo de menor comprimento de extremos $T^{n-2}x$ e $T^{n-2}y$, caso contrário, por conexidade, T^-1 mandaria um intervalo de tamanho menor que ϵ em outro com tamanho maior que $1/4$ o que não pode pela escolha de β. Repetindo o argumento para $n-3$ e assim por diante terminamos a prova. □

Exemplo 15.9. ($h(T) = \infty$.) Construamos um exemplo com entropia topolódica infinita. Seja $T_i : \Lambda_i \to \Lambda_i$ um homeomorfismo, com (Λ_i, d_i) métrico compacto e diametro de Λ_i menor que 1, tal que $h(T) = log(i)$ (shift por exemplo). Colocaremos estes sistemas em um único, para isso o compactificamos acrescentando um "ponto no infitnito". Defina o conjunto

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Lambda_i \cup x_\infty$$

Consideremos em X a métrica d dada por $d(x,y) = d_i(x,y)/i^2$ se $x, y \in \Lambda_i$; $d(x,y) = \sum_{\alpha=i}^{j} 1/\alpha^2$ se $x \in \Lambda_i$ e $y \in \Lambda_j$ $(i < j)$; $d(x_\infty, y) = \sum_{\alpha=i}^{\infty}$ se $y \in \Lambda_i$. Munido X de uma métrica que o torne compacto, agora definamos a aplicação $T : X \to X$. $T(x) = T_i(x)$ se $x \in \Lambda_i$ e $T(x_\infty) = x_\infty$. Assim $h(T) \geq log(i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, por conseguinte $h(T) = \infty$.

15.2.1 Princípio Variacional

Teorema 15.10 (Princípio Variacional)**.** *Seja $T : X \to X$ uma função contínua em um espaço métrico compacto X. Vale a seguinte relação*

$$h(T) = sup\{h_\mu(T) \mid \mu \in \mathcal{M}(T)\}.$$

Lembrando que $\mathcal{M}(T)$ são as probabilidades T-invariantes.

Demonstração. Primeiramente provemos que $h_\mu(T) \leq h(T)$, $\forall \mu \in \mathcal{M}(T)$.

Seja $\xi = \{A_1, \ldots, A_k\}$ uma partição finita. Tomemos $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < 1/(klog(k))$. Sejam $B_j \subset A_j$, $j = 1, \ldots, k$, compactos tais que $\mu(A_j \backslash B_j) < \epsilon$. Definamos a partição $\eta = \{B_0, B_1, \ldots, B_k\}$, onde $B_0 = X \backslash \cup_{j=1}^k B_k$. Então $\mu(B_0) < k\epsilon$.

$$\begin{aligned} H_\mu(\xi|\eta) &= -\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{k}\mu(B_i)\phi\left(\frac{\mu(B_i \cap A_j)}{\mu(B_i)}\right) \\ &= -\mu(B_0)\sum_{j=1}^{k}\phi\left(\frac{\mu(B_i \cap A_j)}{\mu(B_i)}\right) \\ &\leq \mu(B_0)log(k) \leq k\epsilon\, log(k) < 1. \end{aligned}$$

Fazemos agora o relacionamento com a entropia topológica.

Para $i \neq 0$ o conjunto $B_0 \cup B_i = X \backslash \cup_{j \neq i} B_j$ é um aberto. $\beta = \{B_0 \cup B_1, \ldots, B_0 \cup B_k\}$ é uma cobertura aberta de X. Para $n \leq 1$

$$H_\mu(\vee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\eta) \leq log\ N(\vee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\eta)$$

onde $N(\vee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\eta)$ é a quantidade de conjuntos não vazios da partição $\vee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\eta$.

Portanto

$$H_\mu(\vee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\eta) \leq log\ (N(\vee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\beta)2^n)$$

$$\Rightarrow h_\mu(T, \eta) \leq h(T, \beta) + log2 \leq h(T) + log2.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h_\mu(T, \xi) &\leq h_\mu(T, \eta) + H_\mu(\xi|\eta) \\ &\leq h(T) + log2 + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h_\mu(T) &\leq h(T) + log2 + 1 \\ \Rightarrow h_\mu(T^n) &\leq h(T^n) + log2 + 1 \\ \Rightarrow h_\mu(T) &\leq h(T) + (log2 + 1)/n \end{aligned}$$

Mandando n a infinito obtemos

$$h_\mu(T) \leq h(T).$$

Queremos provar a outra desigualdade, isto é $h(t) \leq sup\{h_\mu(T) \mid \mu \in \mathcal{M}(T)\}$. Para isto basta provarmos que dado $\epsilon > 0$, encontramos $\mu \in \mathcal{M}(T)$ tal que $h_\mu(T) \geq s(\epsilon, X, T)$. O que implicaria a desigualdade procurada.

Seja E_n um (n, ϵ) conjunto separado de cardinalidade $s_n(\epsilon, X)$. Seja $\sigma_n = 1/s_n(\epsilon, X) \sum_{x \in E_n} \delta_x$, ou seja σ_n é a medida atômica centrada uniformimente sobre os pontos de E_n.

Definamos agora a medida $\mu_n = 1/n \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_n \circ T^{-i}$. Considere n_j uma subsequência dos naturais crescendo a infinito de modo que

$$\lim_{j \to \infty} 1/n_j \; log \; s_{n_j}(\epsilon, X) = s(\epsilon, X, T) \text{ e } \lim_{j \to \infty} \mu_{n_j} = \mu.$$

Sabemos que μ é T-invariante. Vejamos que $h_\mu(T) \geq s(\epsilon, X, T)$.

Tome uma partição $\xi = \{A_1, \ldots, A_k\}$ tal que $diam(A_i) < \epsilon$ e $\mu(\partial A_i) = 0$, $1 \leq i \leq k$.

Observemos que $H_{\sigma_n}(\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi) = log \; s_n(\epsilon, X)$. Isto porque nenhum membro de $\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi$ pode ter mais que um membro de E_n; temos $s_n(\epsilon, X)$ elementos com medida $1/s_n(\epsilon, X)$ e os outros com medida nula.

Fixe naturais q, n com $1 < q < n$ e defina $a(j) = [(n-j)/q]$, $0 \leq j \leq q-1$. Fixe um tal j. Então

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi = \bigvee_{r=0}^{a(j)-1} T^{-(rq+j)} \bigvee_{i=0}^{q+1} T^{-i}\xi \vee \bigvee_{l \in S} T^{-l}\xi$$

e S tem cardinalidade no máximo igual a $2q$.

Portanto,

$$\begin{aligned} log \; s_n(\epsilon, X) &= H_{\sigma_n}(\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi) \\ &\leq \sum_{r=0}^{a(j)-1} H_{\sigma_n}(T^{-(rq+j)} \vee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi) + \sum_{k \in S} H_{\sigma_n}(T^{-n}\xi) \\ &\leq \sum_{r=0}^{a(j)-1} H_{\sigma_n \circ T^{-(rq+j)}}(\vee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi) + 2q \; log(k). \end{aligned}$$

Somemos em j variando de 0 até $q-1$.

$$q \; log \; s_n(\epsilon, X) \leq \sum_{p=0}^{n-1} H_{\sigma_n \circ T^{-p}}(\vee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi) + 2q^2 \; log(k).$$

Dividindo por n e usando que $H_{\sum \alpha_i \mu_i}(\xi) \geq \sum \alpha_i H_{\mu_i}(\xi)$ obtemos

$$q/n\ log\ s_n(\epsilon, X) \leq H_{\mu_n}(\vee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi) + 2q^2/n\ log(k). \tag{6}$$

Observe que os membros de $\vee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi$ têm fronteira com medida nula, implicando $\lim_{j\to\infty} \mu_{n_j}(B) = \mu(B)$, $\forall B \in \vee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi$.

$$\Rightarrow \lim_{j\to\infty} H_{\mu_{n_j}}(\vee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi) = H_\mu(\vee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi)$$

Substituindo n por n_j em 6 e fazendo $j \to \infty$ temos $qs(\epsilon, X, T) \leq H_\mu(\vee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi)$. Dividindo por q e mandando-o a infinito

$$s(\epsilon, X, T) \leq h_\mu(T, \xi) \leq h(\mu, T).$$

□

Corolário 15.3.

$$h(T) = h(T|_{\Omega(T)})$$

Demonstração. Segue diretamente do princípio variacional e do fato que $\mu(\Omega(T)) = 1$. □

Para continuarmos a fazer o relacionamento entre as entropias métrica e topológica, provemos que a entropia métrica é afim sob o espaço das medidas, ou melhor

Teorema 15.11. *Seja $T : X \to X$ uma função contínua em um espaço métrico compacto. Se $\mu, m \in \mathcal{M}(T, X)$ e $p \in [0, 1]$, então $h_{p\mu+(1-p)m}(T) = ph_\mu(T) + (1 - p)h_m(T)$.*

Vimos na seção 14 que podemos desintegrar uma medida invariante por uma transformação, o que fazemos é essencialmente uma soma convexa de medidas ergódicas. Isto quer dizer que é natural esperar que possamos desintegrar também a entropia mética. Ou seja,

$$h_\mu(T) = \int (h_{\mu_P})\ d\widetilde{\mu}.$$

E de fato isto acontece. Por seu caráter intuitivo e consequências interessantes, utilizaremos o fato sem demonstrá-lo. Sua demonstração pode ser conferida no Teorema 8.4 de [17].

Teorema 15.12. *$T : X \to X$ contínua e X espaço métrico compacto. Então*

$$h(T) = sup\{h_\mu(T) \mid \mu \text{ ergódica }\}.$$

Demonstração. Seja μ_i uma sequência de medidas com entropia finita tal que $h_{\mu_i} \to h(T)$, supomos também que $h_{\mu_i} < h(T)$ (se esta condição não puder ser satisfeita obetmos automaticamente o resultado). Pela observação acima

$$h_\mu(T) = \int (h_{\mu_P})\, d\widetilde{\mu}.$$

Fixado i, se para quase todo P-$\widetilde{\mu}$ q.t.p. $h_{\mu_P} \leq h_{\mu_i}$, então $h_\mu \leq h_{\mu_i} < h(T)$, o que é absurso. Portanto existe P tal que a medida ergódica μ_P tem entropia maior que h_{μ_i}.

□

Definição 15.13. $T : X \to X$ contínua e X espaço métrico compacto. Dizemos que $\mu \in \mathcal{M}(T)$ é uma *medida de máxima entropia* se $h_\mu(T) = h(T)$. O conjunto das medidas de máxima entropia será denotado por $\mathcal{M}_{max}(X, T)$.

A seguir alguns resultados que concernem medidas de máxima entropia.

Teorema 15.14. *Seja $T : X \to X$ contínua e X espaço métrico compacto. Então*

a) $\mathcal{M}_{max}(X, T)$ é convexa;

b) Se $h(T) < \infty$ os pontos extremais de $\mathcal{M}_{max}(X, T)$ são as medidas ergódicas de $\mathcal{M}_{max}(X, T)$;

c) Se $h(T) < \infty$ e $\mathcal{M}_{max}(X, T) \neq \emptyset$, então $\mathcal{M}_{max}(X, T)$ tem uma medida ergódica;

d) Se $h(T) = \infty$, então $\mathcal{M}_{max}(X, T) \neq \emptyset$.

Demonstração. O item a segue diretamente do Teorema 15.11.

Para o item b. Suponha μ um ponto extremal de $\mathcal{M}_{max}(X, T)$, seja $\mu = a\mu_1 + (1 - a)\mu_2$. Então $h_\mu = ah_{\mu_1} + (1 - a)h_{\mu_2}$, logo $h_\mu = h_{\mu_1} = h_{\mu_2}$, caso contrário uma dessas medidas teria entropia maior que a entropia de μ. Como $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_{max}(X, T)$ então $\mu = \mu_1 = \mu_2$. Sendo μ extremal é uma medida ergódica. Agora se μ for ergódica, claramente será ponto extremal de $\mathcal{M}_{max}(X, T)$.

O item c segue diretamente da desintegração de entropia. $h_\mu = \int h_{\mu_P}\, d\widetilde{\mu}$. Caso não houvesse μ_P com máxima entropia, então $h_\mu < h(T) = h_\mu$, absurdo.

Por fim, se $h(T) = \infty$ considere medidas μ_n tais que $h_{\mu_n} \geq 2^n$. Defina a medida

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n \mu_n.$$

Provemos que $h_\mu(T) = \infty$. Fixado N, existe probabilidade ν tal que $\mu = \sum_{n=1}^{N} 1/2^n \mu_n + 1/2^N \nu$. Portanto

$$h_\mu(T) = \sum_{n=1}^{N} 1/2^n h_{\mu_n} + 1/2^N h_\nu \geq \sum_{n=1}^{N} 1/2^n h_{\mu_n} \geq N.$$

Implicando $h_\mu(T) = \infty$.

$\square$

Exercícios

Exercício 15.1. Prove que $h(T) = h(T|_{\cap_{n=0}^{\infty} T^n X})$.

Exercício 15.2. Todo homeomorfismo de $[0,1]$ tem entropia zero.

Exercício 15.3. Todo difeomorfismo Kupka-Smale tem entropia zero.

Exercício 15.4. Exemplo que tenha entropia finita e que não haja medida de máxima entropia.

Exercício 15.5. O Exemplo 15.9 possui medida de máxima entropia, entretanto ela não pode ser ergódica.

Exercício 15.6. Se $h(T) = \infty$ e possui apenas uma medida de máxima entropia, então T é unicamente ergódica.

Exercício 15.7. Se T tem duas medidas de máxima entropia, então possui infinitas.

Exercício 15.8. Seja $A = \{T : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n \mid T \text{ anosov } \}$, então o conjunto $\{h(T)\}_{T \in A}$ é enumerável.

Exercício 15.9. Se T é um homeomorfismo expansivo, então T tem medida de máxima entropia.

16 Apêndice

16.1 Teoria da Medida

Definição 16.1. Seja $\mathfrak{M}$ um conjunto de subconjuntos de Ω. Dizemos que $\mathfrak{M}$ é uma *classe monótona* se:

i) $A_i \in \mathfrak{M}$; $A_i \subset A_{i+1}$; $i \in \mathbb{N}$, implica que $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$;

ii) $A_i \in \mathfrak{M}$; $A_i \supset A_{i+1}$; $i \in \mathbb{N}$, implica que $A = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$.

Teorema 16.2. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\mathfrak{M}$ uma classe monótona. Se $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}$, então $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{M}$.*

Definição 16.3. Uma medida μ na σ-álgebra de Borel é dita regular se dado B mensurável com medida positiva e $\epsilon > 0$ então existe compacto $K_\epsilon \subset B$ e u aberto $U_\epsilon \supset B$ tal que $\mu(U_\epsilon \backslash K_\epsilon) < \epsilon$.

Teorema 16.4. *Uma probabilidade na σ-álgebra de Borel em um espaço métrico é regular.*

Proposição 16.1. *Em espaço de medida finita temos*

$$\mathcal{L}^1 \supset \mathcal{L}^2 \supset \ldots \supset \mathcal{L}^n \supset \ldots$$

Demonstração. Usamos a desigualdade de Jensen. Seja $f \in \mathcal{L}^p$ queremos ver que $f \in \mathcal{L}^{p-1}$. Tome $\phi(t) = t^{\frac{p}{p-1}}$ e portanto

$$\phi(\int f) \leq \int \phi(f) \Rightarrow \left(\int |f|^{p-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} \leq \int (|f|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}$$

□

A seguir, dois resultados conhecidos como Lema de Borel-Cantelli.

Proposição 16.2. *Se $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ converge, então $\mu(lim\ sup\ A_n) = 0$.*

Proposição 16.3. *Se A_n são independentes e $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ diverge, então $\mu(lim\ sup\ A_n) = 1$.*

16.2 Outros

Teorema 16.5. *Seja X um espaço compacto de Hausdorff. São equivalentes*

- *X é metrizável;*
- *X admite base enumerável de abertos;*
- *$C(X) = \{f : X \to \mathcal{C} \mid f$ contínua $\}$ possui subconjunto enumerável denso.*

Referências

[1] Billingsley, P., **Probability and Measure**, *Wiley Interscience*, 1995.

[2] Bonatti, C., Dias L. J. and Viana, M., **Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity: A Global Geometric and Probabilistic Perspective**, *Springer-Verlag*, 2004.

[3] Brin, M. and Stuck, G., **Introduction to Dynamical Systems**, *Cambridge University Press*, 2002.

[4] Carmo, M do, **Geometria Riemanniana**, *Projeto Euclides*, 2005.

[5] Katok, A. and Hasselblatt, B., **Introduction to Modern Theory of Dynamical Systems**, *Cambridge University Press*, 1995.

[6] Lima, E. L., **Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento**, *Projeto Euclides-IMPA*, 1998.

[7] Mañé, R., **Ergodic Theory and Differentiable Dynamics**, *Springer-Verlag*, 1987.

[8] Nitecki, **COLOCAR A BIBLIOGRAFIA**

[9] Palis Jr, J. and Melo, W. de, **Geometric Theory of Dynamical Systems, an introduction**. *Springer-Verlag*, 1982.

[10] Pesin, Y., **Lectures on Partial Hyperbolicity and Stable Ergodicity**, *European Mathematical Society*, 2004

[11] Robinson, C., **Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos**, *CRC Press*, 1999.

[12] Rudolph, D. J., **Fundamentals of Measurable Dynamics: Ergodic Theory on Lebese Spaces**, *Oxford Science Publications*, 1990.

[13] Shub, M., **Endomorphisms of Compact Differentiable Manifolds**, *American Journal of Mathematics, 91:175-199*, 1969.

[14] Shub, M., **Global Stability of Dynamical Systems**, *Springer-Verlag*, 1987.

[15] Sotomayor, J., **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**, *Projeto Euclides - IMPA*, 1979.

[16] Viana, M., **Desintegration into conditional measures: Rokhlin's theorem**, *http://www.impa.br/˜viana.*

[17] Walters, P., **An Introduction to Ergodic Theory**, *Springer-Verlag*, 2000.

[18] Wen, Lan., **A short course on Differentiable Dynamical Systems**, 2002.

Índice Remissivo