Contrações por pedaços

Prof. Benito Pires (USP)

Uma transformação $f : K \to K$ definida num compacto convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ é uma *contração por pedaços* se existirem uma quase-partição $\{P_i\}_{i=1}^n$ de K (formada por abertos disjuntos cuja união é densa em K) e uma constante $0 < \kappa < 1$ tais que $f|_{P_i}$ é uma κ-contração para todo $1 \leq i \leq n$. Dizemos que uma órbita periódica γ de f é um *ciclo limite estável* se existir uma vizinhança $V_\gamma \subset \mathbb{R}^n$ de γ tal que o conjunto ω-limite de todo ponto de V_γ é γ. Neste caso, definimos a *bacia de atração de* γ como sendo o conjunto $B_\gamma = \{p \in \mathbb{R}^n : \omega(p) = \gamma\}$. Estamos interessados em encontrar condições sob as quais f é *assintoticamente periódica quase certamente*, isto é, tem um número finito de ciclos limites estáveis $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ tais que $\bigcup_{j=1}^m B_{\gamma_j}$ tem medida de Lebesgue total em K.

As contrações por pedaços consideradas aqui são geradas por um único IFS $\Phi = \{\phi_i\}_{i=1}^n$ formado por contrações $\phi_i : K \to K$. A ideia é considerar como parâmetro a quase-partição $\{P_i\}_{i=1}^n$ de K. Para cada quase-partição $\{P_i\}_{i=1}^n$, as restrições $\phi_i|_{P_i} : P_i \to K$ definem uma contração por pedaços. Mais especificamente, sejam $\{L_j\}_{j=1}^m$ uma coleção de retas que dividem o interior de K em n convexos abertos $\{P_i\}_{i=1}^n$ e $f = f_{L_1,\ldots,L_m} : K \to K$ a aplicação definida em $\bigcup_{i=1}^n P_i$ por $f|_{P_i} = \phi_i|_{P_i}$. Vamos denotar por $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\Phi)$ a família de todas as contrações por pedaços definidas desta maneira, isto é,

$$\mathscr{C}(\Phi) = \{f_{L_1,\ldots,L_m} : K \to K \mid L_1, \ldots, L_m \text{ são retas que dividem o interior de } K \text{ em } n \text{ convexos}\}.$$

O principal resultado do palestrante, obtido em colaboração com A. Nogueira (Universidade de Aix-Marseille), afirma que um membro típico da coleção $\mathscr{C}(\Phi)$ é uma contração por pedaços assintoticamente periódica quase certamente. Mais especificamente,

Teorema 0.1 (A. Nogueira e B. Pires 2016) *Sejam $K \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto convexo e $\Phi = \{\phi_i\}_{i=1}^n$ um IFS formado por ρ_i-contrações afins $\phi_i : K \to K$ tais que $\sum_{i=1}^n \rho_i < 1$. Então para quase toda coleção de retas $\{L_j\}_{j=1}^m$, a contração por pedaços $f = f_{L_1,\ldots,L_m} : K \to K$ definida por $f|_{P_i} = \phi_i|_{P_i}$ é assintoticamente periódica quase certamente, isto é, ela tem um número finito de ciclos limites estáveis cujas bacias de atração formam um subconjunto de medida total de K.*