Análise de Estabilidade para Métodos de Diferenças Finitas

Equações Parabólicas Lineares

Saulo Pomponet Oliveira [1]
Prof. Dr. Petrônio Pulino [2]
Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

Resumo: Este trabalho faz uma análise de estabilidade de métodos explícitos e implícitos de diferenças finitas para equações diferenciais parciais lineares do tipo parabólico, considerando problemas com condição inicial e condições de contorno do tipo Dirichlet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_o(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x,t)u + d(x,t) \quad , \quad t > 0 \quad , \quad a < x < b$$

$$u(x,0) = f(x)$$
$$u(a,t) = \phi(t)$$
$$u(b,t) = \psi(t)$$

Utilizamos os resultados obtidos para a obtenção de uma medida de estabilidade no caso particular da equação de *Black-Scholes*, equação utilizada na determinação do preço de derivativos financeiros.

Cabe observar que o problema acima pode ser do tipo hiperbólico a depender dos coeficientes a_0 e a_1, embora os resultados a serem apresentados independem desta questão.

Palavras-Chaves: diferenças finitas, option pricing .

[1] Aluno de Mestrado em Matemática Aplicada. E-mail: *saulo@ime.unicamp.br*
[2] Departamento de Matemática Aplicada. E-mail: *pulino@ime.unicamp.br*

1 Introdução

Seja o seguinte problema homogêneo no domínio $\Omega = [a,b] \times [0,T]$:

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(u(x,t)) = 0 \quad , \ t > 0 \quad , \ a < x < b \\ u(x,0) = f(x) \\ u(a,t) = \phi(t) \\ u(b,t) = \psi(t) \quad , \end{array} \tag{1}$$

cuja equação diferencial associada $\mathcal{L}(u) = 0$ é linear e do tipo parabólico:

$$\mathcal{L}(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - a_o(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - a_2(x,t)u \tag{2}$$

Vamos adimitir que o problema (1) esteja nas condições de existência e unicidade de solução e denotar por $u^*(x,t)$ a solução do problema.

Seja $\Omega_h = \{a = x_1 < x_2 < \ldots x_N = b\} \times \{0 = t_1 < t_2 < \ldots t_m = T\}$ uma discretização do domínio Ω com intervalos igualmente espaçados de comprimento h na variável x e comprimento k na variável t. Seja $\mathcal{L}_h$ uma aproximação do operador $\mathcal{L}$, cuja solução em Ω_h é denotada por U.

No caso de diferenças finitas, o operador $\mathcal{L}_h$ consiste num conjunto de equações a diferenças. Neste artigo vamos considerar aproximações que envolvem apenas dois níveis de tempo. Tais aproximações podem ser divididas em duas classes, a dos **métodos explícitos**, da forma :

$$\mathcal{L}_h(u) = u(x,t+k) - \sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j u(x+jh,t) \quad , \tag{3}$$

e a dos **métodos implícitos**:

$$\mathcal{L}_h(u) = \sum_{j=-n_1}^{n_2} b_j u(x+jh,t+k) - \sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j u(x+jh,t) \tag{4}$$

Os coeficientes c_j e b_j podem depender de x, t e h. Vamos analisar em particular a equação de *Black-Scholes*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + rx\frac{\partial u}{\partial x} - ru \tag{5}$$

2 Estabilidade e Consistência

A idéia central de estabilidade de um método de diferenças finitas para equações de evolução é que os procedimentos numéricos do método devem limitar a amplificação dos dados iniciais

Seja $U^{n+1} = [U_{1,n+1}, U_{2,n+1}, \ldots U_{N,n+1}]$ o vetor que contém a solução U de $\mathcal{L}_h = 0$ em cada ponto (x_i, t_{n+1}) de Ω_h . Podemos representar (3) e (4) na forma matricial usando os vetores U^n e U^{n+1} :

$$BU^{n+1} = AU^n + c^n \quad , \tag{6}$$

sendo que $B = I$ para o método explícito e $c^n = [c_1^n, 0, \ldots, 0, c_N^n]$ resulta das condições de contorno no nível de tempo n.

Definição 2.1 : Dizemos que o operador $\mathcal{L}_h$ é estável se existe $M > 0$ tal que, para cada n fixo,

$$\|U^{n+1}\| \leq M \quad \forall\ h, k > 0 \tag{7}$$

Esta definição é um caso particular do conceito de estabilidade no sentido de Lax-Richtmyer para equações lineares.

Observe que uma condição necessária para que U^{n+1} satisfaça (7) é que $\|B^{-1}A\| \leq 1$. Seja $\rho(C)$ o raio espectral de uma matriz quadrada C. Assim, uma condição equivalente de estabilidade é a seguinte:

$$\rho(B^{-1}A) \leq 1 \tag{8}$$

A noção de consistência ou compatibilidade está associada à precisão com que o operador $\mathcal{L}_h$ aproxima $\mathcal{L}$.

Em geral, temos que a solução u^* de (1) satisfaz[3] $\mathcal{L}_h(u^*) \not\equiv \mathcal{L}(u^*)$, ou seja, $\mathcal{L}_h(u^*) \not\equiv 0$. Seja $T_{i,n}$ definido da seguinte forma:

$$T_{i,n} = \mathcal{L}_h(u^*(x,t))\,|_{(x_i,t_n)} \tag{9}$$

$T_{i,n}$ é denominado **erro de truncamento local** no ponto (x_i, t_n).

Observe que $T_{i,n}$ representa uma medida da diferença entre a solução analítica u^* e a solução aproximada U (U satisfaz $\mathcal{L}_h(U) = 0$) em cada ponto (x_i, t_n).

[3] a menos que u^* pertença ao núcleo do operador $\mathcal{L}_h$

Como em geral não conhecemos a solução u^*, podemos comparar os dois operadores utilizando uma função $v \in C^2[a,b]$ arbitrária, em que não necessariamente $\mathcal{L}_h(v) = 0$. Definimos assim a **função erro de truncamento local** em (x_i, t_n):

$$\tau_{i,n}(v) = (\mathcal{L}_h(v(x,t)) - \mathcal{L}(v(x,t)))|_{(x_i,t_n)} \tag{10}$$

Definição 2.2 : O esquema definido por $\mathcal{L}_h$ é dito consistente se

$$\lim_{h,k\to 0} \tau_{i,n}(v) = 0 \quad , \quad 1 \le i \le N \quad , \quad 1 \le m \le m \tag{11}$$

Utilizaremos uma definição particular de consistência (Forsythe (1960)) em que a razão $\lambda = k/h^2$ é constante :

Definição 2.3 : Dizemos que $\mathcal{L}_h$ é uma **aproximação formal** de $\mathcal{L}$ se para toda função $v \in C^2[a,b]$, temos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{k}\mathcal{L}_h(v) = \mathcal{L}(v) \quad , \quad \frac{k}{h^2} = \lambda = \text{cte.} \tag{12}$$

Definição 2.4 : Uma solução aproximada U definida por $\mathcal{L}_h(U) = 0$ converge para a solução u^* de (1) se

$$\lim_{h,k\to 0} \|U(x,t) - u^*(x,t)\| = 0 \tag{13}$$

Em equações lineares, as propriedades de consistência e estabilidade são condições suficientes para a convergência da solução aproximada.

3 Estabilidade de Métodos Explícitos

Vamos inicialmente obter condições sobre os coeficientes c_j em (3) para que $\mathcal{L}_h$ seja uma aproximação formal.

Considere as seguintes expansões em série de Taylor em torno de (x,t):

$$\begin{aligned} v(x,t+k) &= v(x,t) + \tfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}k + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 v(x,\eta)}{\partial t^2}k^2 \quad , \quad t \le \eta \le t+k \\ v(x+jh,t) &= v(x,t) + \tfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}(jh) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}(jh)^2 + \\ &\quad + \tfrac{1}{6}\tfrac{\partial^3 v(\xi_j,t)}{\partial x^3}(jh)^3 \quad , \quad x \le \xi_j \le x+jh \end{aligned} \tag{14}$$

Substituindo (14) em (3) e dividindo por k, obtemos:

$$\frac{1}{k}\mathcal{L}_h(v) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{k}\left(\sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j - 1\right) v(x,t) -$$

$$\frac{1}{k}\left(h\sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j j\right)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{2\lambda}\left(\sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j j^2\right)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - \tag{15}$$

$$-\frac{h}{6\lambda}\left(\sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j j^3 \frac{\partial^3 v(\xi_j,t)}{\partial x^3}\right) + k\frac{\partial^2 v(x,\eta)}{\partial t^2}$$

Para que $\mathcal{L}_h$ seja uma aproximação formal de $\mathcal{L}$, os coeficientes c_j devem satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left(\sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j - 1\right) &= a_2(x,t) \\
\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left(h\sum_{j=-n_1}^{n_2} j c_j\right) &= a_1(x,t) \qquad (16) \\
\lim_{k\to 0}\frac{1}{2\lambda}\left(\sum_{j=-n_1}^{n_2} j^2 c_j\right) &= a_0(x,t)
\end{aligned}$$

A condição (16) leva ao seguinte resultado:

Lema 3.1 : Se $a_2(x,t)$ é uma função limitada e $\mathcal{L}_h$ é uma aproximação formal, então existe $\alpha > 0$ tal que

$$\sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j \leq 1 + \alpha\ k \tag{17}$$

para todo (x,t) e para todo $k, h > 0$.

Demonstração :
Seja $\bar{a_2} > 0$ tal que $\mid a_2(x,t) \mid \leq \bar{a_2}$. Sendo $\mathcal{L}_h$ uma aproximação formal, temos de (16) que a sequência y_n definida a seguir converge para zero:

$$y_n = \left| \frac{1}{k}\left(\sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j - 1\right) - a_2(x,t) \right|$$

Como y_n é convergente e $a_2(x,t)$ é limitada, existe $M > 0$ tal que $y_n \leq M$ para todo (x,t) e para todo $k, h > 0$. Temos que:

$$\left| \sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j - (1 + ka_2(x,t)) \right| \leq kM \tag{18}$$

Pela desigualdade triangular:

$$\sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j \leq \left| \sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j \right| \leq \left| \sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j - (1 + ka_2(x,t)) \right| + \mid 1 + ka_2(x,t) \mid$$

Pela desigualdade (18) e novamente pela desigualdade triangular,

$$\sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j \leq 1 + k(M + \mid a_2(x,t) \mid) \leq 1 + k(M + \bar{a_2}) \tag{19}$$

Temos que (17) segue de (19) escolhendo $\alpha \ = M + \bar{a}_2 \ $.

O teorema a seguir estabelece condições suficientes de limitação da solução aproximada, o que implica a estabilidade do operador segundo a condição (8), para o operador definido em (3). Uma das condições é a positividade não estrita dos coeficientes c_j:

Definição 3.1 : Um operador $\mathcal{L}_h$ definido por (3) é do tipo positivo se existe $h_1 > 0$ tal que $c_j \geq 0$, $-n_1 \leq j \leq n_2$, para todo (x,t) e para todo $h \ , \ 0 \leq h \leq h_1$.

Teorema 3.1 : Seja $\mathcal{L}_h$ uma aproximação formal do tipo positivo para o operador $\mathcal{L}$ dado por (2). Supomos no problema (1) que as funções f, $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são limitadas em Ω por $\bar{f}$, $\bar{\phi}$ e $\bar{\psi}$, respectivamente. Supomos também que a função a_2 é limitada em Ω.

Nestas condições, existe uma constante $M = M(T)$ independente de x, t, h e k tal que a solução aproximada U satisfaz a seguinte condição :

$$\mid U(x,t) \mid \leq M \max\{\bar{f}, \bar{\phi}, \bar{\psi}\} \tag{20}$$

Demonstração :
Vamos obter um limitante para a solução aproximada U em instantes de

tempo progressivamente superiores $k, 2k, ..., nk = t$. Observe de início que ao longo de $t = k$ temos duas possibilidades : ou o máximo de U está na fronteira :

$$| U(x,k) | \leq max\{\phi(k), \psi(k)\} \leq \max\{\bar{\phi}, \bar{\psi}\} \tag{21}$$

ou o máximo está localizado no interior de [a,b], ou seja,

$$\exists\ x_o \in (a,b)\ ;\ | U(x,k) | \leq | U(x_o,k) |\ \ \forall\ x \in [a,b] \tag{22}$$

Como $\mathcal{L}_h$ é do tipo positivo e $\mathcal{L}_h(U) = 0$, segue que:

$$\begin{aligned} | U(x_o,k) | &\leq \sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j \, | U(x_o + jh, 0) | \\ | U(x_o,k) | &\leq \bar{f} \sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j \ . \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1, existe $\alpha > 0$ tal que

$$| U(x_o,k) | \leq \bar{f}(1 + k\alpha) \tag{23}$$

De (22) a (24), temos que:

$$| U(x_o,k) | \leq \max\{\bar{\phi}, \bar{\psi}, \bar{f}(1+k\alpha)\} \leq (1+k\alpha)\max\{\bar{f}, \bar{\phi}, \bar{\psi}\} \tag{24}$$

Agora, ao longo de $t = 2k$, $U(x, 2k)$ deve satisfazer (22) ou então

$$\exists\ x_1 \in (a,b)\ ;\ | U(x,2k) | \leq | U(x_1,2k) |\ \ \forall\ x \in [a,b] \tag{25}$$

Repetindo o argumento anterior para (26):

$$\begin{aligned} | U(x_1,2k) | &\leq \sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j \, | U(x_1 + jh, k) | \\ | U(x_1,k) | &\leq (1+k\alpha)\max\{\bar{f}, \bar{\phi}, \bar{\psi}\} \sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j \\ | U(x_1,k) | &\leq (1+k\alpha)^2 \max\{\bar{f}, \bar{\phi}, \bar{\psi}\} \end{aligned}$$

Por indução finita, temos no instante n:

$$| U(x_1,t) | \leq (1+k\alpha)^n \max\{\bar{f}, \bar{\phi}, \bar{\psi}\} \tag{26}$$

Podemos escolher M da seguinte forma (vide Piskounov (1978), pag. 54):

$$M = 3^{\alpha T} \geq (1+k\alpha)^{\frac{\alpha T}{k\alpha}} \geq (1+k\alpha)^{\frac{t}{k}} = (1+k\alpha)^n \ . \tag{27}$$

4 Extensão para Problemas não-homogêneos

Vamos estender os resultados acima para o caso em que $\mathcal{L}(u(x,t)) = d(x,t)$ no problema (1). A solução analítica neste caso é a solução do problema homogêneo mais a solução do problema não-homogêneo com condições de contorno homogêneas:

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}(u(x,t)) = d(x,t) \quad , \quad t > 0 \quad , \quad a < x < b \\ u(x,0) = f(x) \\ u(a,t) = 0 \\ u(b,t) = 0 \end{array} \tag{28}$$

A aproximação do problema (28) é dada por:

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}_h(U(x,t)) = kd(x,t) \quad , \quad (x,t) \in \Omega_h \\ u(x,t_1) = f(x) \\ u(x_1,t) = 0 \\ u(x_N,t) = 0 \end{array} \tag{29}$$

A função d é discretizada no tempo da seguinte forma:

$$f(x,t) = f(x,nk) = \sum_{r=0}^{m} d_r(x,nk) \ , \ d_r(x,nk) = \delta_{n,k} d(x,nk) \tag{30}$$

Se U_r é uma solução de $\mathcal{L}_h(U(x,t)) = kd_r(x,t)$, por linearidade :

$$\mathcal{L}_h \left(\sum_{r=0}^{m} U_r(x,t) \right) = \mathcal{L}_h(U_p(x,t)) = kd(x,t) \tag{31}$$

Do mesmo modo que o caso analítico, a solução U de (29) consiste da soma de U_p com a solução U_H do problema homogêneo aproximado, visto anteriormente.

Vamos obter a solução U_p no caso particular em que a solução envolve apenas os nívies de tempo nk e $(n+1)k$. Para $0 \leq r \leq m$, temos que:

$$\mathcal{L}_h(U_r) = 0 \quad , \quad t < rk \tag{32}$$

Podemos escolher $U_r(x,t) = 0$ para $t \leq rk$. Como $\mathcal{L}_h(U_r(x,rk)) = kd(x,rk)$, temos que $U_r(x,(r+1)k)$ pode ser calculado diretamente de (3) para o método explícito :

$$U_r(x,(r+1)k) = kd(x,rk) \tag{33}$$

ou de (4) para o método implícito :

$$\sum_{j=-n_1}^{n_2} c_r U_r(x_i,(r+1)k) = kd(x_i,rk) \quad , \quad 1 \leq i \leq N \tag{34}$$

Para $t > rk$, os valores de $U_r(x_i,t)$ são obtidos resolvendo o problema homogêneo em que a origem da variável tempo sofre uma translação para $t = (r+1)k$. Assim, definindo a variável temporal $t' = t-(r+1)k$ e denotando por $\Omega_h^{'}$ o domínio adaptado para $0 = t_1 < \ldots < t_M = T-(n-1)k$, temos que $U_r(x_i,t)$, $t > rk$, é solução do seguinte problema:

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}_h(U_r(x,t')) = 0 \qquad , \quad (x,t') \in \Omega_h^{'} \\ u(x,0) = d(x,rk) \\ u(x_1,t') = 0 \\ u(x_N,t') = 0 \end{array} \tag{35}$$

Podemos assim pensar na solução aproximada do problema não-homogêneo como a solução de uma sequência de problemas homogêneos, permitindo a generalização dos resultados anteriores. Forsythe (1960) generaliza o resultado da desigualdade (20) para problemas não-homogêneos da forma (28), supondo que a função d é limitada por $\bar{d}$ em Ω :

$$\mid U(x,t) \mid \leq M(\max\{\bar{f},\bar{\phi},\bar{\psi}\} + t\bar{d}) \tag{36}$$

5 Extensão para Métodos Implícitos

A extensão do Teorema 3.1 para métodos implícitos requer uma definição mais geral de positividade:

Definição 5.1 : Um operador $\mathcal{L}_h$ definido por (4) é do tipo positivo se existe $h_1 > 0$ tal que

$$\begin{array}{rcl} b_j & \leq & 0 \quad , \quad -n_1 \leq j \leq n_2 \quad , \quad j \neq 0 \\ b_0 & \geq & 0 \\ c_j & \geq & 0 \quad , \quad -n_1 \leq j \leq n_2 \end{array}$$

para todo (x,t) e para todo h , $0 \leq h \leq h_1$

Com esta nova definição, pode-se mostrar que os operadores formais implícitos do tipo positivo, nas condições do teorema 3.1, são tais que a solução U de $\mathcal{L}_h(U) = 0$ é limitada e portanto , o operador $\mathcal{L}$ é estável.

Cabe ressaltar que a condição de positividade para um método implícito pode ser bastante restritiva , conforme verificamos em experimentos numéricos com o método de Crank-Nicolson para a equação (5) : as condições de positividade nao foram necessárias para a estabilidade do método.

6 Estabilidade da Equação de Black-Scholes

Consideremos o seguinte problema , cuja equação associada é a equação de *Black-Scholes* (5) com parâmetros r, σ, $E > 0$ e e $E < L$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - rx\frac{\partial u}{\partial x} + ru = 0 \quad , \quad 0 < t < T \quad , \quad 0 < x < L$$

$$\begin{array}{l} u(x,0) = f(x) = \max\{x - E, 0\} \\ u(0,t) = \phi(t) \ = 0 \\ u(L,t) = \psi(t) \ = L - Ee^{-r(T-t)} \ , \end{array} \tag{37}$$

Inicialmente, vamos obter condições de estabilidade de um método explícito particular, com diferenças centradas no espaço. Neste caso :

$$\frac{\partial u}{\partial t}\,|_{(x_i,t_n)} \approx \frac{U(x_i, t_n + k) - U(x_i, t_n)}{k} \tag{38}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,|_{(x_i,t_n)} \approx \frac{U(x_i + h, t_n) - U(x_i - h, t_n)}{2h} \tag{39}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,|_{(x_i,t_n)} \approx \frac{U(x_i + h, t_n) - 2U(x_i, t_n) + U(x_i - h, t_n)}{h^2} \tag{40}$$

A substituição de (38) a (40) na equação (5) leva a um operador $\mathcal{L}_h$ na forma (3), em que $n_1 = n_2 = 1$ e os coeficientes c_j são dados por:

$$c_{-1} = k\left(\frac{1}{2h^2}\sigma^2 x^2 - \frac{rx}{2h}\right) \qquad c_0 = 1 - k\left(\frac{1}{h^2}\sigma^2 x^2 + r\right)$$

$$c_1 = k\left(\frac{1}{2h^2}\sigma^2 x^2 + \frac{rx}{2h}\right) \tag{41}$$

Os coeficientes em (41) revelam que a análise de estabilidade tradicional (usando transformada discreta de Fourier) não é uma alternativa simples, de modo que será mais conveniente verificar as condições do teorema 3.1 .

Observemos que as funções $f(x)$, $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são contínuas e portanto limitadas no domínio $\Omega = [0, S] \times [0, T]$ do problema. Além disso, $a_2(x, t) = r$ também é limitada. Verifica-se que os coeficientes c_j satisfazem as condições dadas em (16) e que portanto o operador $\mathcal{L}_h$ é uma aproximação formal.

Resta verificar em que condições o operador é positivo. Observe que o coeficiente c_1 é sempre positivo. Impondo $c_o \geq 0$ obtemos:

$$\lambda \leq \frac{1 - rk}{\sigma^2 x^2} \tag{42}$$

Esta condição pode ser substituida por uma restrição maior:

$$\lambda \leq \frac{1 - rk}{\sigma^2 L^2} \tag{43}$$

Temos que (43) é uma condição suficiente para a convergência do método explícito. Como em geral temos r e $k \ll 1$, esperamos que a seguinte condição também seja suficiente:

$$\lambda \leq \frac{1}{\sigma^2 L^2} \tag{44}$$

Analogamente, a condição $c_{-1} \geq 0$ implica que

$$\frac{\sigma^2 x}{h} \geq r \tag{45}$$

Tomando $x = h$, obtemos :

$$\frac{\sigma^2}{r} \geq 1 \tag{46}$$

Esta é uma condição extremamente restritiva, pois envolve os parâmetros do problema original. A violação de (46), que ocorre quando o coeficiente de transporte r tem um valor alto se comparado com o coeficiente de difusão σ; esta é uma fonte de instabilidade bem conhecida na literatura de análise numérica. Em geral são necessários métodos de diferenças finitas adaptados para estes casos.

7 Resultados Numéricos

Verificamos a validade da condição (44) utilizando a condição (9). Os gráficos apresentados a seguir foram gerados pelo *software* MATLAB© e descrevem a sensibilidade do raio espectral da matriz associada ao operador aos parâmetros da equação.

Os testes foram realizados com $E = 10$, $\sigma = 0.02$, $r = 0.05$ e $T = 1$. O número N de pontos na variável x é igual a 30. A extremidade $x = L$ é dada por $L = 2 * E$. O valor de h é determinado a partir de N, e o valor de k é calculado a partir de um valor λ' em torno da razão λ , onde λ é dada por (44). Variando os valores de E, σ e r em torno dos valores dados, obtemos uma curva do valor do raio espectral da matriz associada ao operador com relação a cada um dos três parâmetros.

Observamos que há estabilidade para λ' menor ou igual que λ , desde que o valor de r não cresca muito (isto em geral não ocorre no problema real). Os valores de λ' que ficaram um pouco acima de de λ já apresentaram sinais de instabilidade, indicando que a condição dada em (44) deve estar próxima da condição mínima de estabilidade. Em todos os casos, a condição (46) não foi necessária.

Os experimentos numéricos indicam que a abordagem apresentada para análise de estabilidade pode ser útil nas equações diferenciais com coeficientes variáveis, para as quais usualmente se determina experimentalmente uma estimativa das condições em que um esquema de diferenças finitas é estável.

Há duas possibilidades de melhoria dos resultados obtidos : tornar o teorema menos restritivo para o caso dos métodos implícitos, e tentar obter condições em que a primeira derivada aproximada da solução também seja limitada, praticamente eliminando a possibilidade de oscilações espúrias.

Apêndice : Contratos de Opções

Uma **opção** é um tipo de contrato envolvendo de um lado o comprador, e do outro, o vendedor da opção. O comprador adquire por meio desta o direito de vender (**opção de venda**) ou de comprar (**opção de compra**) um determinado ativo em data futura. O vendedor assume a obrigação futura de atender ao direito do comprador, recebendo uma remuneração (**prêmio da opção**) pela responsabilidade assumida.

O dia em que a opção será exercida (**data de vencimento**) e o preço do ativo em questão (**preço de exercício**) são estabelecidos no contrato.

O comprador não tem o dever de vender ou comprar o ativo no futuro, ou seja, ele pode desistir da transação se as condições do mercado não forem adequadas. Por outro lado, o vendedor da opção é obrigado a honrar o contrato, independente das condições do mercado. Este desequilíbrio é compensado por uma escolha adequada do valor do prêmio. O problema de determinar este valor é conhecido como precificação de opções (*option pricing*) .

Há uma classe maior de contratos na qual as opções estão inseridas, os **derivativos**. Os derivativos são contratos caracterizados pela dependência de um ou mais ativos e sujeitos a um conjunto de restrições sobre os direitos e deveres das partes e sobre os prazos de vencimento, consistindo em variações do contrato usual de compra ou venda no ato.

A necessidade de novas formas de **gestão de riscos e de capital** impulsiona a criação contínua de novos derivativos, dinamizando as pesquisas nesta área. O desenvolvimento de métodos numéricos para avaliação de derivativos é um campo de pesquisa crescente em Matemática Aplicada.

Equação de Black e Scholes

Um dos tipos principais de opções negociadas em Bolsas de Valores são as **opções européias**, contratos de opções nos quais o comprador somente pode exercer seu direito na data de vencimento.

O modelo apresentado em Black e Scholes (1973) trata inicialmente de opções européias sobre ações, sem pagamento de dividendos e sem custos de transação. Este modelo estabelece uma relação entre o prêmio de uma opção e as variáveis tempo e preço da ação, dados os seguintes parâmetros:

- r: Taxa média de juros no mercado (%/ano) [4]
- σ^2 : Volatilidade (%/ano)
- E: Preço de exercício do ativo (\$)
- T: Data de vencimento da opção (anos)

Vamos representar o prêmio da opção pela função $V(S,t)$, sendo S e t as variáveis preço e tempo[5], respectivamente.

[4] as unidades foram escolhidas apenas para fixar idéias.

[5] O problema é originalmente formulado com o tempo variando de T até zero

A relação estabelecida é que $V(s,t)$ é solução da equação de *Black-Scholes*:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV \quad , \quad 0 < t \leq T \quad , \quad S > 0 \tag{47}$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{array}{l} V(S,0) = f(S) \\ V(S,t) \approx V_o(S,t) \quad , \quad S \to 0 \\ V(S,t) \approx V_\infty(S,t) \quad , \quad S \to \infty \end{array} \tag{48}$$

As funções f, V_o e V_∞ são diferentes para opções de compra e venda. Para opções de compra,

$$\begin{array}{l} f(S) = \max\{S - E, 0\} \\ V_o(S,t) = 0 \\ V_\infty(S,t) = S - Ee^{-r(T-t)} \end{array} \tag{49}$$

Para opções de venda, temos

$$\begin{array}{l} f(S) = \max\{E - S, 0\} \\ V_o(S,t) = e^{-r(T-t)} \\ V_\infty(S,t) = 0 \end{array} \tag{50}$$

Observe que a equação de *Black-Scholes* é valida tanto para opções de compra quanto para opções de venda. No mesmo artigo, Black e Scholes apresentam uma solução analítica para opções de compra, conhecida como **fórmula de** *Black-Scholes* :

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \quad , \tag{51}$$

$$d1 = \frac{\log(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}, \tag{52}$$

$$d2 = \frac{\log(S/E) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}, \tag{53}$$

sendo N a função de distribuição acumulada da função de densidade normal.

A solução analítica para opções de venda pode ser obtida por solução direta da equação ou utilizando a fórmula (5) mais uma relação de paridade entre opções de compra e venda (*put-call parity*):

$$S + P(S,t) - C(S,t) = Ee^{-r(T-t)} \tag{54}$$

Wilmott (1993) e Hull (1997) deduzem detalhadamente a equação (46). Wilmott (1993) deduz a fórmula de *Black-Scholes* de forma bem organizada, fazendo conexões com os métodos matemáticos de física clássica.

O trabalho de Brennan(1978) foi um dos primeiros a apresentar a precificação de opções por diferenças finitas.

8 Bibliografia

[1] Black, F. e Scholes, M (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities.*Journal of Political Economy*, Vol 4, 323-38.

[2] Brennan, M. J. e Schwartz, E.S. (1978). Finite Difference Methods Arising in the Princing of Contingent Claims: a Synthesis.*Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol 13, 461-74.

[3] Figlewski, S. , Siber, W. L. e Subrahmanyan, M. G. (ed) (1997). *Financial Options - From Theory to Pratice*. Leonard N. Stern School of Business - New York Universtiy. Irwin.

[4] Forsythe, G. E. e Wasow, W.R. (1978).*Finite Difference Methods for Partial Differential Equations*.John Wiley & Sons, Inc.

[5] Hull, J. (1997).*Options, Futures and Other Derivatives*, 3rd. Edition. Prentice Hall.

[6] Piskounov, N. (1978).*Cálculo Diferencial e Integral , Vol. 1.* Edições Lopes da Silva.

[7] Smith, (1985).*Numerical Solution of Partial Differential Equations - Finite Difference Methods , 3rd Ed.*. Claredon Press - Oxford.

[8] Wilmott, P. , Howison, S. e Dewynne, J. (1995).*The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge University Press.

Figura 1 : Caso 1: $\lambda' < \lambda$, em que a estabilidade é esperada.

Figura 2 : Caso 2: $\lambda' = \lambda$. Observemos que o raio espectral tornou-se mais sensível ao parâmetro r.

Figura 3 : Caso 2: $\lambda' = \lambda$. Os parâmetros agora variam em um intervalo menor

Figura 4 : Caso 3: $\lambda' > \lambda$. O raio espectral já não é mais limitado por 1.

Figura 5 : Caso 3: $\lambda' > \lambda$. Os valores do raio espectral indicam claramente a ocorrência de instabildade.