Métodos Estabilizados de Elementos Finitos

Márcio Rodolfo Fernandes - MTM/CFM/UFSC
fernands@ime.unicamp.br
Petronio Pulino - DMA/IMECC/UNICAMP
pulino@ime.unicamp.br

DMA/IMECC/UNICAMP
Caixa Postal 6065, CEP 13081-970
Campinas-SP-Brasil

Abstract: O método dos elementos finitos é um dos mais conhecidos e utilizados para a discretização de equações diferenciais, mas em sua forma padrão, conhecida como método de Galerkin, não apresenta bom comportamento em equações de difusão-convecção quando o coeficiente de difusão é pequeno. Neste trabalho, apresentamos algumas variantes do método de Galerkin para a resolução deste tipo de equações , construídas para a obtenção de melhores propriedades de estabilidade numérica.

1 Problema Variacional Simétrico

Vamos considerar $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert com $\| \cdot \|_H$ a norma associada ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Uma forma linear $b(\cdot)$ em H é dita contínua se existe $c_1 < \infty$ tal que

$$| \, b(v) \, | \leq c_1 \|v\|_H, \quad \forall v \in H.$$

De forma análoga, uma forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ em H é dita contínua se existe $c_2 < \infty$ tal que

$$| \, a(v, w) \, | \leq c_2 \|v\|_H \|w\|_H, \quad \forall v, w \in H$$

e coerciva se existe $c_3 > 0$ tal que

$$a(v,v) \geq c_3 \|v\|_H^2, \quad \forall v \in H.$$

Se $a(u,v) = a(v,u), \quad \forall u, v \in H$ então dizemos que $a(\cdot,\cdot)$ é uma forma bilinear simétrica.

De modo geral, dada $a(\cdot,\cdot)$ uma forma bilinear simétrica, contínua e coerciva em H e dada uma forma linear contínua $b(\cdot)$, podemos definir o problema variacional simétrico

$$\textit{encontrar } \; u^* \in H \; \textit{ tal que } \; a(u,v) = b(v), \quad \forall v \in H. \tag{1}$$

Teorema de Lax-Milgram: Sejam H um espaço de Hilbert, uma forma bilinear contínua e coerciva $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \Re$ e $b(\cdot) : H \to \Re$ uma forma linear contínua. Então, existe um único $u^* \in H$ solução da equação

$$a(u,v) = b(v), \quad \forall v \in H,$$

além disso, vale a seguinte estimativa de estabilidade

$$\|u\|_H \leq \frac{c_1}{c_3}.$$

Se tomarmos $a(\cdot,\cdot)$ simétrica, então a demonstração do teorema acima é uma aplicação do Teorema de Representação de Riesz. Em ambos os casos, simétrico ou não-simétrico, a demonstração pode ser encontrada em *[1]*.

Associado ao problema variacional *(1)*, temos o seguinte problema variacional discreto ou aproximação de Ritz-Galerkin: dado um subespaço de dimensão finita $V_h \subset H$,

$$\textit{encontrar } \; u_h \in V_h \; \textit{ tal que } \; a(u_h,v) = b(v), \quad \forall v \in V_h. \tag{2}$$

De forma análoga ao problema variacional *(1)*, o problema variacional discreto *(2)* tem solução única.

Lema de Céa: Considerando válidas as condições do Teorema de Lax-Milgram e supondo que u seja solução de *(1)*. Então, para o problema variacional discreto *(2)* vale que

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{c_2}{c_3} \min\{\|u - v\|_H, \; \forall v \in V_h\},$$

onde c_2 é a constante de continuidade e c_3 a constante de coercividade.

Vamos considerar o seguinte problema variacional:

$$encontrar \;\; u \in H \equiv H_0^1(0,1) \;\; tal\ que \;\; a(u,v) = b(v), \quad \forall v \in H, \qquad (3)$$

onde

$$a(u,v) = \int_0^1 (\alpha(x)u^{'}(x)v^{'}(x) + \sigma(x)u(x)v(x))dx \quad e \quad b(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Associado ao problema *(3)*, temos o seguinte problema de valores de contorno:

$$-\left(\alpha(x)u^{'}(x)\right)^{'} + \sigma(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \qquad (4)$$

$$u(0) = u(1) = 0, \qquad (5)$$

com $\alpha(x)$ e $\sigma(x)$ funções dadas.

Buscaremos uma aproximação da solução de *(1)* pela resolução de *(2)*. Seja uma partição $\Pi : \quad 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = 1$ do domínio. Sobre esta partição definiremos o espaço das funções de Lagrange lineares por partes

$$L_1(\Pi) = \{v \in H^1(0,1); v\mid_K \in \mathcal{P}_1(K), \forall K \in \Pi\},$$

gerado pela base $\{\phi_i\}_{i=0}^{n+1}$, onde $\mathcal{P}_1(K)$ é o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 1, definidos em K. Como as condições de contorno *(5)* são homogêneas, podemos retirar ϕ_0 *e* ϕ_{n+1} da base. Assim, temos um novo espaço denotado por $L_1^0(\Pi) = \{v \in L_1(\Pi);\ v(0) = v(1) = 0\}$. Note que $L_1^0(\Pi) \subset H_0^1(0,1)$ e tem dimensão finita. Portanto, podemos escolher $V_h = L_1^0(\Pi)$.

Uma função $v \in L_1^0(\Pi)$ tem a representação

$$v(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \phi_j(x), \quad onde \;\; \alpha_j = v(x_j).$$

Desta forma, o problema *(2)* é equivalente ao sistema linear

$$C\alpha = d \qquad (6)$$

onde $C = [c_{ij}]$ é uma matriz quadrada de ordem $(n-1)$ com elementos dados por $c_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$, $\alpha = [\alpha_i]$ é o vetor de incógnitas com $\alpha_i = u_h(x_i)$ *e* d é o vetor do lado direito, $d = [d_i]$, com $d_i = b(\phi_i)$.

2 Problema Variacional Não-Simétrico

De modo análogo a seção anterior, se a forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ não for simétrica, podemos definir o problema variacional não-simétrico, bem como, o seu respectivo problema variacional discreto.

Como já citamos anteriormente, o Teorema de Lax-Milgram continua valendo neste caso, assim como a estimativa dada pelo Lema de Céa. Portanto, podemos garantir a existência e a unicidade da solução tanto de *(1)* quanto de *(2)*, com $a(\cdot,\cdot)$ não necessariamente simétrica.

Na próxima seção trabalharemos com problemas de valores de contorno cujo problema variacional associado é não-simétrico.

3 Equações de Difusão-Convecção

Equações diferenciais associadas a fenômenos de transporte têm grande importância prática na modelagem de um vasto número de problemas. Estas podem ser de difícil análise, tanto do ponto de vista teórico quanto numérico, nos casos em que ocorram predominância do termo convectivo sobre o termo difusivo. Isto se explica pela possibilidade da presença de ondas de choque, que correspondem a regiões de descontinuidade da solução, ou então de regiões de transição muito rápida.

Vamos nos ater ao caso unidimensional da equação de difusão-convecção:

$$-\left(\alpha(x)u^{'}(x)\right)^{'} + \beta(x)u^{'}(x) + \sigma(x)u(x) = f(x), \quad x \in (a,b) \tag{7}$$

com as condições de contorno de Dirichlet

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0. \tag{8}$$

A função $\alpha(x)$ é conhecida como coeficiente de difusão, $\beta(x)$ é o coeficiente de convecção - responável pelo transporte da solução - e $\sigma(x)$ é o coeficiente de absorção. Todas elas, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ e $\sigma(x)$ devem ser estritamente positivas em (a,b).

Podemos formular o seguinte problema variacional não-simétrico equivalente a *(7)*: encontrar $u \in H_0^1(a,b)$ tal que

$$\int_a^b (\alpha(x)u^{'}(x)v^{'}(x) + \beta(x)u^{'}(x)v(x) + \sigma(x)u(x)v(x))dx =$$

$$= \int_a^b f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(a,b). \tag{9}$$

Se tomarmos $V_h = L_1^0(\Pi)$, estaremos buscando uma aproximação para a solução do problema *(9)*. Este método recebe o nome de método de Galerkin e pode ser resumido como: encontrar $u_h \in L_1^0(\Pi)$ tal que

$$a(u_h, v) = b(v), \quad \forall v \in L_1^0(\Pi), \tag{10}$$

com

$$a(u_h, v) = \int_a^b (\alpha(x) u_h^{'}(x) v^{'}(x) + \beta(x) u_h^{'}(x) v(x) + \sigma(x) u_h(x) v(x)) dx$$

e

$$b(v) \equiv \langle f, v \rangle = \int_a^b f(x) v(x) dx.$$

3.1 Estimativas da Solução de Galerkin

Vamos obter uma estimativa da estabilidade do método de Galerkin. Para isto, tomando $v = u_h$ em *(10)* obtemos

$$a(u_h, u_h) = \langle \alpha u_h^{'}, u_h^{'} \rangle + \langle \beta u_h^{'}, u_h \rangle + \langle \sigma u_h, u_h \rangle = \langle f, u_h \rangle. \tag{11}$$

Assumindo que o campo de velocidades β corresponda a um fluxo incompressível, isto é $\beta^{'}(x) = 0$, e levando em consideração as condições de fronteira do nosso problema, podemos integrar $\langle \beta u_h^{'}, u_h \rangle$ por partes e concluir que este termo se anula identicamente.

Desta forma, *(11)* se reduz a

$$\langle \alpha u_h^{'}, u_h^{'} \rangle + \langle \sigma u_h, u_h \rangle = \langle f, u_h \rangle. \tag{12}$$

Considerando a desigualdade

$$2ab \leq a^2 \epsilon + \frac{b^2}{\epsilon}, \quad \forall \epsilon, a, b \in \Re \; e \; \epsilon > 0, \tag{13}$$

podemos reescrer *(12)* como

$$\langle \alpha u_h^{'}, u_h^{'} \rangle + \langle \sigma u_h, u_h \rangle \leq \frac{\epsilon}{2} \langle f, f \rangle + \frac{1}{2\epsilon} \langle u_h, u_h \rangle,$$

que implica em

$$\langle \alpha u_h^{'}, u_h^{'} \rangle + \langle (\sigma - \frac{1}{2\epsilon}) u_h, u_h \rangle \leq \frac{\epsilon}{2} \langle f, f \rangle,$$

ou

$$\|\alpha^{\frac{1}{2}} u_h^{'}\|^2 + \|(\sigma - \frac{1}{2\epsilon})^{\frac{1}{2}} u_h\|^2 \leq \frac{\epsilon}{2}\|f\|^2, \tag{14}$$

onde

$$\|u\|^2 = \int_a^b u^2(x)dx.$$

Observação 1: Na estimativa *(14)* podemos observar que se f for limitada na norma L_2 obteremos um controle no comportamento das soluções aproximadas u_h, bem como em sua derivada de primeira ordem, desde que a função $\alpha(x)$ não seja pequena. Se $\alpha(x)$ se aproxima de zero em $[a, b]$, então o controle sobre o tamanho de $u_h^{'}$ se perde. Aparecem então oscilações espúrias na solução u_h, como pode ser visto na figura abaixo, gráfico da simulação numérica com coeficientes $\alpha = 10^{-3}, \sigma = 1.0, \beta = 1.0, f(x) = e^{-x}$.

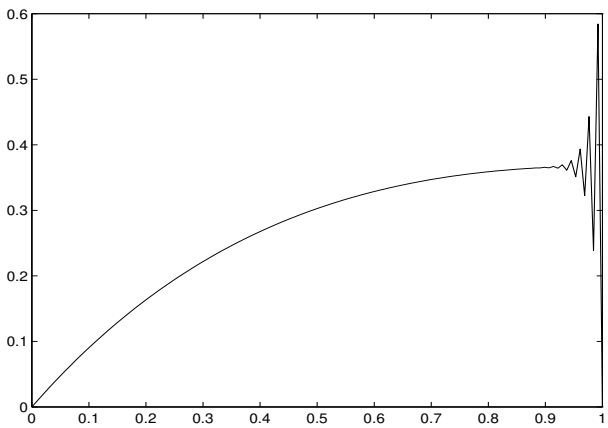

Figura 1: Simulação numérica com o método de Galerkin

Para a obtenção de uma estimativa do erro da aproximação do problema *(7)-(8)* via método de Galerkin, vamos definir $e_h = u_h - \overline{u}_h$, $z_h = u - \overline{u}_h$ e $e = u - u_h$, onde $\overline{u}_h \in L_1^0(\Pi)$ é a função que interpola a u que é a solução de *(7)-(8)* e u_h é a sua solução numérica obtida pelo método de Galerkin.

Desta forma, $e_h = z_h - e$ e

$$a(e_h, e_h) = \langle \alpha e_h^{'}, e_h^{'} \rangle + \langle \sigma e_h, e_h \rangle = a(z_h, e_h) - a(e, e_h). \tag{15}$$

Fazendo a diferença entre as soluções das formulações variacionais contínua *(9)* e discreta *(10)*, concluímos que

$$a(u - u_h, v) = 0, \quad \forall v \in L_1^0(\Pi). \tag{16}$$

Como $e_h \in L_1^0(\Pi)$, reescrevemos *(15)* como

$$\langle \alpha e_h^{'}, e_h^{'} \rangle + \langle \sigma e_h, e_h \rangle = a(z_h, e_h) =$$

$$\langle \alpha z_h^{'}, e_h^{'} \rangle + \langle \beta z_h^{'}, e_h \rangle + \langle \sigma z_h, e_h \rangle \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\langle \alpha z_h^{'}, z_h^{'} \rangle + \frac{1}{2}\langle \alpha e_h^{'}, e_h^{'} \rangle + \frac{\epsilon}{2}\langle \beta z_h^{'}, \beta z_h^{'} \rangle +$$

$$+ \frac{1}{2\epsilon}\langle e_h, e_h \rangle + \frac{1}{2}\langle \sigma z_h, z_h \rangle + \frac{1}{2}\langle \sigma e_h, e_h \rangle.$$

Para a obtenção desta última desigualdade, usamos *(13)*. Logo,

$$\langle \alpha e_h^{'}, e_h^{'} \rangle + \langle (\sigma - \frac{1}{\epsilon}) e_h, e_h \rangle \leq$$

$$\leq \langle \alpha z_h^{'}, z_h^{'} \rangle + \epsilon \langle \beta z_h^{'}, \beta z_h^{'} \rangle + \langle \sigma z_h, z_h \rangle \leq$$

$$\leq C_1 (2\|z_h^{'}\|^2 + \|z_h\|^2),$$

onde

$$C_1 = \max(sup\ \alpha, \epsilon\ sup\ \beta^2, sup\ \sigma).$$

De acordo com *[2]*, se $V_h = L_k^0(\Pi)$, o espaço das funções de Lagrange de grau menor ou igual a k, para qualquer $u \in H^{k+1}(a, b)$ existe um interpolante $\overline{u}_h \in V_h$ tal que

$$\|u - \overline{u}_h\|_1^2 \leq C h^{2k} \|u\|_{k+1}^2, \tag{17}$$

onde

$$\|u\|_k^2 = \|u\|^2 + \|u^{'}\|^2 + \cdots + \|u^{(k)}\|^2,$$

e

$$h = \max(x_{k+1} - x_k), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Então,

$$\min(\alpha, \sigma - \frac{1}{\epsilon}) \|e_h\|_1^2 \leq \langle \alpha e_h^{'}, e_h^{'} \rangle + \langle (\sigma - \frac{1}{\epsilon}) e_h, e_h \rangle \leq$$

$$\leq C h^{2k} \|u\|_{k+1}^2,$$

ou

$$\|e_h\|_1 \leq \overline{C} h^k \|u\|_{k+1}.$$

Como $e = z_h - e_h$, usando a desigualdade triangular concluímos que

$$\|e\|_1 \leq \overline{C} h^k \|u\|_{k+1}. \tag{18}$$

Observação 2: Podemos observar que a constante $\overline{C}$ depende do recíproco da constante $\min(\alpha, \sigma - \frac{1}{\epsilon})$. Portanto, se α for pequena, a estimativa *(18)* não garantirá um bom comportamento das soluções aproximadas.

3.2 Método de Difusão Artificial

A forma mais simples de evitar o aparecimento das oscilações citadas na *observação 1* é adicionar um termo difusivo artificial $-\delta u^{''}$ à equação *(7)*. De forma mais precisa, queremos encontrar $u_h \in L_1^0(\Pi)$ tal que

$$C\langle u_h^{'}, v^{'} \rangle + \langle \beta u_h^{'}, v \rangle + \langle \sigma u_h, v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in L_1^0(\Pi).$$

De maneira análoga a seção anterior, temos a estimativa de estabilidade na norma $L_2(a, b)$:

$$\|C^{\frac{1}{2}} u_h^{'}\|^2 + \|(\sigma - \frac{1}{2\epsilon})^{\frac{1}{2}} u_h\|^2 \leq \frac{\epsilon}{2} \|f\|^2. \tag{19}$$

A constante C depende da escolha do parâmetro δ. De acordo com esta escolha temos três métodos diferentes, a saber:

Método	δ	C
Difusão Artificial Clássico	$h - \alpha$	h
Difusão Artificial Modificado	$\beta^2(h - \alpha)$	$h + \alpha(1 - \beta^2)$
"Classical Upwind"	h	$h + \alpha$

Estes métodos produzem soluções numéricas sem oscilações, mas introduzem uma perturbação na equação original que não permite que a precisão do método seja melhor que $O(h)$, mesmo quando usamos, em cada elemento, interpolação polinomial de ordem maior que 1. Nas figuras abaixo, apresentamos gráficos de simulações numéricas com coeficientes $\alpha = 10^{-3},\ \sigma = 1.0,\ \beta = 1.0,\ f(x) = e^{-x}$.

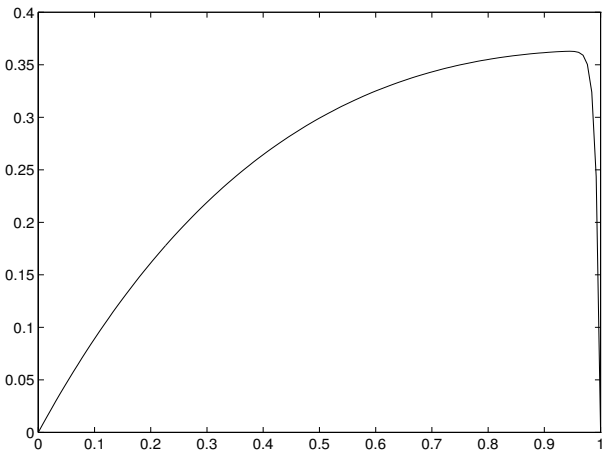

Figura 2: Simulação com o método de difusão artificial modificado

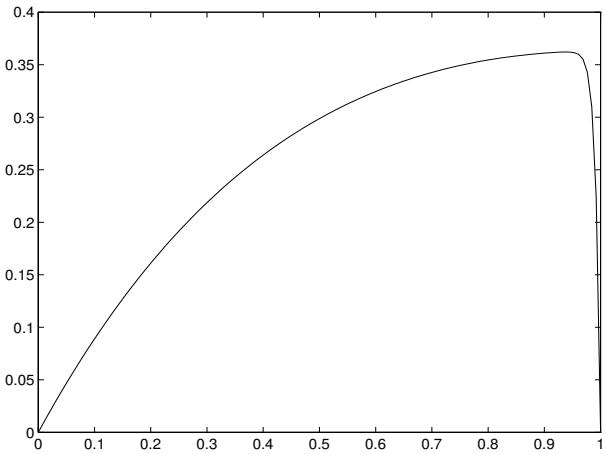

Figura 3: Simulação numérica com o método "Classical Upwind"

3.3 Método "Streamline Diffusion"

Se alterarmos o espaço das funções teste tornando-o diferente do espaço de aproximação, estaremos nos referindo a uma família de métodos conhecidos como métodos de Petrov-Galerkin. O método "Streamline Diffusion" é um membro desta família. Para estabelecê-lo, multiplicamos a equação *(7)* por uma função teste do tipo $v + \delta\beta v^{'}$, com $v \in H_0^1(a,b)$, e integramos para obter :

$$\langle \alpha u^{'}, v^{'} \rangle - \delta \langle (\alpha u^{'})^{'}, \beta v^{'} \rangle + \langle \beta u^{'}, v \rangle + \delta \langle \beta u^{'}, \beta v^{'} \rangle +$$

$$+ \langle \sigma u, v \rangle + \delta \langle \sigma u, \beta v^{'} \rangle = \langle f, v + \delta\beta v^{'} \rangle, \tag{20}$$

onde δ é um parâmetro que definiremos posteriormente.

O problema variacional discreto associado a *(20)* é:
encontrar $u_h \in V_h \subset H \equiv H_0^1(a,b)$ tal que

$$\langle \alpha u_h^{'}, v^{'} \rangle - \delta \langle (\alpha u_h^{'})^{'}, \beta v^{'} \rangle + \langle \beta u_h^{'}, v \rangle + \delta \langle \beta u_h^{'}, \beta v^{'} \rangle +$$

$$+ \langle \sigma u_h, v \rangle + \delta \langle \sigma u_h, \beta v^{'} \rangle = \langle f, v + \delta\beta v^{'} \rangle, \quad \forall v \in V_h, \tag{21}$$

onde $\delta = Ch$ se $\alpha < h$ com $C > 0$ e $\delta = 0$ se $\alpha \geq h$.

Tomando $v = u_h$, podemos reescrever *(21)* como

$$\langle \alpha u_h^{'}, u_h^{'} \rangle - \delta \langle (\alpha u_h^{'})^{'}, \beta u_h^{'} \rangle + \langle \beta u_h^{'}, u_h \rangle + \delta \langle \beta u_h^{'}, \beta u_h^{'} \rangle +$$

$$+ \langle \sigma u_h, u_h \rangle + \delta \langle \sigma u_h, \beta u_h^{'} \rangle = \langle f, u_h + \delta\beta u_h^{'} \rangle. \tag{22}$$

Se tomarmos σ e β constantes e $V_h = L_1^0(\Pi)$, então , integrando por partes e usando as condições de contorno vem que

$$\langle \alpha u_h^{'}, u_h^{'} \rangle + \delta \langle \beta u_h^{'}, \beta u_h^{'} \rangle + \langle \sigma u_h, u_h \rangle = \langle f, u_h + \delta\beta u_h^{'} \rangle. \tag{23}$$

Usando *(13)* e tomando α constante temos que

$$\alpha \|u_h^{'}\|^2 + \delta\beta^2 \|u_h^{'}\|^2 + \sigma \|u_h\|^2 \leq \frac{\epsilon_1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2\epsilon_1}\|u_h\|^2 + \frac{\delta\beta\epsilon_2}{2}\|f\|^2 + \frac{\delta\beta}{2\epsilon_2}\|u_h^{'}\|^2.$$

$$(\alpha + \delta\beta^2 - \frac{\delta\beta}{2\epsilon_2})\|u_h^{'}\|^2 + (\sigma - \frac{1}{2\epsilon_1})\|u_h\|^2 \leq (\frac{\epsilon_1 + \delta\beta\epsilon_2}{2})\|f\|^2. \tag{24}$$

Observação 3: Comparando *(24)* com a respectiva estimativa *(14)* do método de Galerkin, vemos que se $f \in L_2(a,b)$ conseguimos um controle melhor do comportamento de $u_h^{'}$, mesmo quando α se aproxima de zero. Veja na figura abaixo, a simulação numérica do método "Streamline Diffusion" com coeficientes $\alpha = 10^{-3}, \sigma = 1.0, \beta = 1.0, f(x) = e^{-x}$.

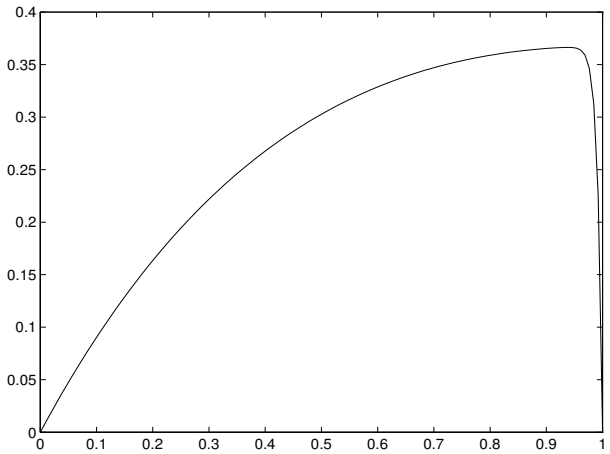

Figura 4: Simulação numérica com o método "Streamline Diffusion"

Na obtenção de uma estimativa do erro da aproximação do problema *(7)-(8)* pelo método "Streamline Diffusion", vamos proceder como antes.

Lembrando que, $e_h = z_h - e$ então

$$a(e_h, e_h) = \langle \alpha e_h^{'}, e_h^{'} \rangle - \delta \langle (\alpha e_h^{'})^{'}, \beta e_h^{'} \rangle + \delta \langle \beta e_h^{'}, \beta e_h^{'} \rangle + \langle \sigma e_h, e_h \rangle =$$

$$= a(z_h, e_h) - a(e, e_h). \tag{25}$$

Mas, de *(16)*

$$a(e, v) = 0, \quad \forall v \in L_1^0(\Pi).$$

Como $e_h \in L_1^0(\Pi)$, reescrevemos *(25)* como

$$a(e_h, e_h) = \langle \alpha e_h^{'}, e_h^{'} \rangle + \delta \langle \beta e_h^{'}, \beta e_h^{'} \rangle + \langle \sigma e_h, e_h \rangle = a(z_h, e_h) =$$

$$\langle \alpha z_h^{'}, e_h^{'} \rangle + \langle \beta z_h^{'}, e_h \rangle + \delta \langle \sigma z_h, \beta e_h^{'} \rangle + \delta \langle \beta z_h^{'}, \beta e_h^{'} \rangle + \langle \sigma z_h, e_h \rangle \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\langle \alpha z_h^{'}, z_h^{'}\rangle + \frac{1}{2}\langle \alpha e_h^{'}, e_h^{'}\rangle + \frac{\epsilon_1}{2}\langle \beta z_h^{'}, \beta z_h^{'}\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2\epsilon_1}\langle e_h, e_h\rangle + \frac{1}{2}\langle \sigma z_h, z_h\rangle + \frac{1}{2}\langle \sigma e_h, e_h\rangle +$$

$$+ \delta\sigma(\frac{\epsilon_2}{2}\langle z_h, z_h\rangle + \frac{1}{2\epsilon_2}\langle \beta e_h^{'}, \beta e_h^{'}\rangle) \ + \delta(\frac{1}{2}\langle \beta z_h^{'}, \beta z_h^{'}\rangle + \frac{1}{2}\langle \beta e_h^{'}, \beta e_h^{'}\rangle).$$

Usando *(13)* para a obtenção desta última desigualdade. Logo,

$$(\alpha + \delta\beta^2(1 - \frac{\sigma}{\epsilon_2}))\langle e_h^{'}, e_h^{'}\rangle + \langle(\sigma - \frac{1}{\epsilon_1})e_h, e_h\rangle \leq$$

$$\leq (\alpha + \beta^2(\epsilon_1 + \delta))\langle z_h^{'}, z_h^{'}\rangle + \sigma(\delta\epsilon_2 + 1)\langle z_h, z_h\rangle \leq$$

$$\leq C_1(\|z_h^{'}\|^2 + \|z_h\|^2).$$

E de acordo com *(17)*, para $k = 1$, vem que

$$\|e_h\|_1 \leq C_2 h\|u\|_2.$$

Como $e = z_h - e_h$, usando a desigualdade triangular concluímos que

$$\|e\|_1 \leq \overline{C}h\|u\|_2. \tag{26}$$

3.4 Método de Galerkin com funções "bolha"

Uma outra forma de descrever o espaço $L_1(\Pi)$ é através de sua base local. Se definirmos uma transformação de coordenadas que leva cada subintervalo (ou elemento) da partição Π no intervalo $[-1, 1]$ e vice-versa, podemos definir as funções de base neste sistema de coordenadas. No caso do espaço $L_1(\Pi)$, temos duas funções de base em cada elemento :

$$\hat{\lambda_1}(t) = \frac{1}{2}(1 - t), \quad \hat{\lambda_2}(t) = \frac{1}{2}(1 + t), \quad t \in [-1, 1].$$

Similarmente, para $L_2(\Pi)$ a base local é dada por três funções das quais vamos destacar

$$\varphi(t) = 4\hat{\lambda_1}(t)\hat{\lambda_2}(t) = 1 - t^2.$$

Note que φ se anula na fronteira de cada elemento, e é positiva em seu interior. Por isso, φ também é conhecida como função bolha.

Vamos considerar o seguinte subespaço

$$V_h^b = L_1^0(\Pi) \oplus B(\Pi),$$

onde $B(\Pi)$ denota o espaço das funções bolha definido sobre a partição Π.

Se em *(10)* tomarmos $V_h = V_h^b$ estaremos construindo uma variação do método de Galerkin , enriquecida com funções bolha, mais estável que o método em sua forma usual no caso de equações do tipo difusão-convecção. Este método pode ser descrito pelo problema:

Encontrar $u_h \in V_h^b$ tal que

$$\langle \alpha u_h^{'}, v^{'} \rangle + \langle \beta u_h^{'}, v \rangle + \langle \sigma u_h, v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V_h^b. \tag{27}$$

Se em *(27)* tomarmos $v = \varphi(x)$ para $x \in K$ e $v = 0$ caso contrário, obtemos

$$\langle \alpha u_h^{'}, \varphi^{'} \rangle_K + \langle \beta u_h^{'}, \varphi \rangle_K + \langle \sigma u_h, \varphi \rangle_K = \langle f, \varphi \rangle_K,$$

onde o subescrito K indica integração no elemento K.

Podemos decompor a solução u_h em sua parte linear $u_1 \in L_1^0(\Pi)$ e sua parte gerada pelas bolhas, isto é,

$$u_h = u_1 + \sum_K u_b^K \varphi, \tag{28}$$

onde u_b^K é o coeficiente da função bolha no elemento K.

Substituindo *(28)* em *(27)* temos

$$\langle \alpha u_1^{'}, \varphi^{'} \rangle_K + u_b^K \langle \alpha \varphi^{'}, \varphi^{'} \rangle_K + \langle \beta u_1^{'}, \varphi \rangle_K + u_b^K \langle \beta \varphi^{'}, \varphi \rangle_K +$$

$$+ \langle \sigma u_1, \varphi \rangle_K + u_b^K \langle \sigma \varphi, \varphi \rangle_K = \langle f, \varphi \rangle_K.$$

Porém, para $\forall w \in L_1^0(\Pi)$ e α constante temos, integrando por partes, que $\langle \alpha w^{'}, \varphi^{'} \rangle_K = 0$. Lembrando que, para β constante, $\langle \beta \varphi^{'}, \varphi \rangle_K = 0$, temos que

$$u_b^K[\alpha\|\varphi^{'}\|_K^2 + \|\sigma^{\frac{1}{2}}\varphi\|_K^2] = \langle f - \beta u_1^{'} - \sigma u_1, \varphi\rangle_K.$$

Isto é, o coeficiente da função bolha pode ser eliminado, em cada elemento, por

$$u_b^K = \frac{\langle f - \beta u_1^{'} - \sigma u_1, \varphi\rangle_K}{\alpha\|\varphi^{'}\|_K^2 + \|\sigma^{\frac{1}{2}}\varphi\|_K^2}. \tag{29}$$

Este procedimento pode ser repetido para cada elemento $K \in \Pi$. Se em *(27)* tomarmos $v = v_1 \in L_1^0(\Pi)$ e usarmos *(28)*, temos que

$$\langle \alpha u_1^{'}, v_1^{'}\rangle + \sum_K u_b^K \langle \alpha\varphi^{'}, v_1^{'}\rangle_K + \langle \beta u_1^{'}, v_1\rangle + \sum_K u_b^K \langle \beta\varphi^{'}, v_1\rangle_K +$$

$$+ \ \langle \sigma u_1, v_1\rangle + \sum_K u_b^K \langle \sigma\varphi, v_1\rangle_K = \langle f, v_1\rangle. \tag{30}$$

Então, o problema variacional resultante *(30)* é equivalente a usar o método de Galerkin com $V_h = L_1^0(\Pi)$ mais um termo que em vista de *(29)* pode ser reescrito como

$$\sum_K u_b^K \langle \beta\varphi^{'} + \sigma\varphi, v_1\rangle_K = \sum_K \frac{\langle f - \beta u_1^{'} - \sigma u_1, \varphi\rangle_K}{\alpha\|\varphi^{'}\|_K^2 + \|\sigma^{\frac{1}{2}}\varphi\|_K^2} \langle \varphi, \sigma v_1 - \beta v_1^{'}\rangle_K =$$

$$= \sum_K \frac{\langle f - \beta u_1^{'} - \sigma u_1, \sigma v_1 - \beta v_1^{'}\rangle_K}{\alpha\|\varphi^{'}\|_K^2 + \|\sigma^{\frac{1}{2}}\varphi\|_K^2} C\|\varphi\|_K^2, \tag{31}$$

onde C é uma constante.

Isto sugere uma alteração do espaço das funções teste, ou seja, a inclusão de funções "bolha" funciona como um método tipo Petrov-Galerkin para estabilizar o problema variacional.

Tomando *(30)* com $v_1 = u_1$ e usando *(31)* temos em cada elemnto K que

$$\langle \alpha u_1^{'}, u_1^{'}\rangle_K + \langle \sigma u_1, u_1\rangle_K +$$

$$+ \frac{\langle f - \beta u_1^{'} - \sigma u_1, \sigma u_1 - \beta u_1^{'}\rangle_K}{\alpha\|\varphi^{'}\|_K^2 + \|\sigma^{\frac{1}{2}}\varphi\|_K^2} C\|\varphi\|_K^2 = \langle f, u_1\rangle_K,$$

ou

$$\langle \alpha u_1^{'}, u_1^{'} \rangle_K + \langle \sigma u_1, u_1 \rangle_K + C_K \langle f - \beta u_1^{'} - \sigma u_1, \sigma u_1 - \beta u_1^{'} \rangle_K = \langle f, u_1 \rangle_K,$$

onde

$$C_K = \frac{C\|\varphi\|_K^2}{\alpha\|\varphi^{'}\|_K^2 + \|\sigma^{\frac{1}{2}}\varphi\|_K^2}.$$

Podemos reescrever a última equação como

$$\langle \alpha u_1^{'}, u_1^{'} \rangle_K + \langle \sigma u_1, u_1 \rangle_K + C_K[\langle \beta u_1^{'}, \beta u_1^{'} \rangle_K - \langle \sigma u_1, \sigma u_1 \rangle_K] =$$

$$= \langle f, u_1 \rangle_K - C_K[\langle f, \sigma u_1 \rangle_K - \langle f, \beta u_1^{'} \rangle_K]. \tag{32}$$

Usando a desigualdade *(13)*, e tomando σ também constante, temos que

$$(\alpha + C_K\beta^2)\|u_1^{'}\|_K^2 + (\sigma(1 - \sigma C_K))\|u_1\|_K^2 \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon_1}{2}\|f\|_K^2 + \frac{(1 - \sigma C_K)^2}{2\epsilon_1}\|u_1\|_K^2 + \frac{\epsilon_2}{2}\|f\|_K^2 + \frac{(\beta C_K)^2}{2\epsilon_2}\|u_1^{'}\|_K^2. \tag{33}$$

Rearranjando *(33)* temos que

$$(\alpha + C_K\beta^2 - \frac{(\beta C_K)^2}{2\epsilon_2})\|u_1^{'}\|_K^2 + (\sigma(1 - \sigma C_K) - \frac{(1 - \sigma C_K)^2}{2\epsilon_1})\|u_1\|_K^2 \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}\|f\|_K^2, \tag{34}$$

que é uma estimativa para a estabilidade de *(27)*. Na figura abaixo, temos uma simulação com coeficientes $\alpha = 10^{-3}, \sigma = 1.0, \beta = 1.0, f(x) = e^{-x}$.

4 Conclusões

Dos métodos apresentados como alternativa ao método de Galerkin, os métodos do tipo difusão artificial têm a desvantagem de serem inconsitentes com a equação diferencial. O método "Streamline Diffusion" e o método de Galerkin com funções "bolha" têm bom comportamento, mas o primeiro introduz dificuldades adicionais em sua implementação, o que não ocorre no segundo, ao menos no caso unidimensional. Por isso, pretendemos intensificar nossas pesquisas neste, para modelos bidimensionais.

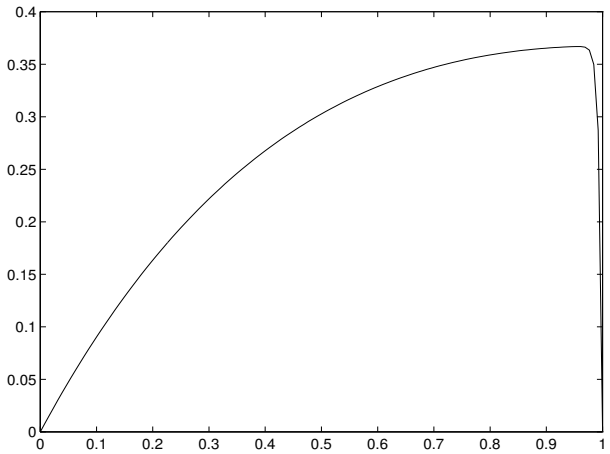

Figura 5: Simulação com o método de Galerkin com funções "bolha"

5 Referências

[1] B. Dayanand Reddy, *Functional Analysis and Boundary-value Problems: an Introductory Treatment*, Longman Scientific & Techinical, 1986.

[2] C. Johnson, *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Cambridge University Press, 1987.

[3] S.C. Brenner and L. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag, 1994.

[4] L.P. Franca and C. Farhat, "On the Limitations of Bubble Functions", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 117:225-230, 1994.

[5] L.P. Franca and C. Farhat, "Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 123:299-380, 1995.