Desigualdades Variacionais, Métodos Numéricos e o Problema de Infiltração

Patrícia Nunes da Silva
nunes@ime.unicamp.br

Renato Fernandes Cantão
cantao@ime.unicamp.br

Petrônio Pulino
pulino@ime.unicamp.br

DMA/IMECC/UNICAMP
CP 6065 - CEP 13081-970
Campinas - São Paulo - Brasil

1 Introdução

Faremos uma breve apresentação da teoria de desigualdades variacionais e uma aplicação ao estudo de um problema de fronteira livre associado a uma classe de problemas denominada **Problemas de Infiltração**. Além disso, apresentaremos resultados numéricos referentes à resolução de um Problema de Complementaridade Linear por um método de Penalização.

Na apresentação das chamadas desigualdades variacionais, partimos, seguindo a referência [7], de um exemplo bem simples de minimização de uma função quadrática num intervalo fechado e limitado. Passamos por casos especiais de desigualdades que envolvem formas lineares e bilineares (v. [5]) e, terminamos com um lema de existência de solução para uma desigualdade variacional mais geral que engloba os casos apresentados inicialmente. Para satisfazer as hipóteses deste lema, diferentes condições são impostas ao operador envolvido na desigualdade, conforme as referências [5], [7] e [8].

Os aspectos físicos e matemáticos dos Problemas de Infiltração serão apresentados detalhadamente conforme as referências [1], [2] e [3].

O trabalho divide-se nas seguintes partes conceituais: (i) alguns aspectos teóricos de desigualdades variacionais, (ii) colocação do problema físico mais geral, (iii) estabelecimento do problema diferencial, (iv) estabelecimento de um problema auxiliar, (v) o caso particular, (vi) aspectos variacionais, (vii) redução do problema a um problema de Complementaridade Linear (problema discreto) e (viii) resolução numérica.

2 Desigualdades Variacionais

A teoria moderna de desigualdades variacionais tem suas origens no problema clássico de minimizar uma função convexa e diferenciável sobre um conjunto convexo. Consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 1. Seja f uma função quadrática definida em $\mathbb{R}$. Estamos interessados em determinar o ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{1}{2}\, bx^2 - ax + c\,; \;\; b > 0,$$

atinja seu valor mínimo para $x \in \mathbb{R}$. Necessariamente, x_0 satisfaz:

$$f'(x_0) = bx_0 - a = 0. \tag{1}$$

E, como $b > 0,\ f$ atinge seu mínimo em $x_0 = a/b$. No entanto, se adicionarmos ao problema de minimização uma restrição, como por exemplo

$$x_0 \in K = \{x \in \mathbb{R} \mid \; x_1 \leq x \leq x_2\},$$

a condição dada em (1) já não caracterizará a solução. Um ponto de mínimo x_0 de f em K satisfaz, por definição, a seguinte desigualdade

$$f(x_0) \leq f(x), \;\; \forall\, x \in K.$$

Como K é convexo, $x_0 + \theta(x - x_0)$ pertence a K para todo θ pertencente a $[0, 1]$ e para todo $x \in K$. Logo,

$$f(x_0 + \theta(x - x_0)) \geq f(x_0)$$

e

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{1}{\theta}[f(x_0 + \theta(x - x_0)) - f(x_0)] = f'(x_0)(x - x_0) \geq 0.$$

Em outras palavras, o minimizador x_0 de f é agora caracterizado pela **desigualdade:**

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0, \ \forall \, x \in K. \tag{2}$$

A Figura 1 ilustra os três casos que podem ocorrer:

1. Se $x_0 = x_1$, então $f'(x_0) \geq 0$;
2. se $x_0 = x_2$, então $f'(x_0) \leq 0$; e
3. se $x_1 < x_0 < x_2$, então $f'(x_0) = 0$.

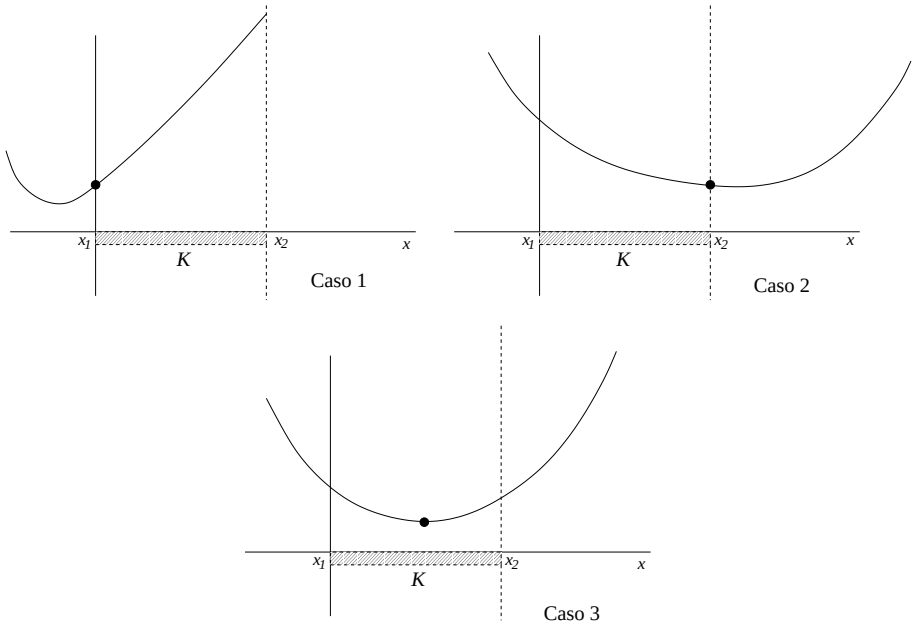

Figura 1: Minimização em um convexo.

Observemos que os dois primeiros casos satisfazem a condição (2); apenas no caso 3, em que o minimizador x_0 pertence ao interior do conjunto K temos

$f'(x_0) = 0$. No entanto, tal caso também está descrito pela condição (2), pois como $x_0 \in (x_1, x_2)$, sempre podemos encontrar $\epsilon > 0$ tal que para qualquer $y \in K$, $x = x_0 \pm \epsilon y$ pertença a K e, portanto, temos

$$\pm \epsilon f'(x_0) y \geq 0, \ \ \forall \ y \in K.$$

Logo, $f'(x_0) = 0$. Portanto, a condição (2) inclui a caracterização dada pela condição (1).

Nem sempre as desigualdades variacionais estarão associadas a problemas de minimização. Trataremos na próxima seção de desigualdades variacionais que envolvem uma forma bilinear (simétrica ou não) e uma forma linear contínua. Sempre podemos associar a tais desigualdades um problema problema de minimização caso a forma bilinear seja simétrica. Quando isto não ocorre não temos necessariamente tal associação.

2.1 Formas Bilineares

Seja V um espaço de Hilbert cujo produto interno e norma são denotados por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\| \cdot \|$, respectivamente. Seja V^* o conjunto dos funcionais lineares contínuos definidos em V (dual topológico de V).

Seja $a(\cdot, \cdot)$ uma forma bilinear contínua (não necessariamente simétrica) em V, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|; \ \text{ para todo } \ u, v \in V. \tag{3}$$

Sejam, finalmente, K um conjunto convexo de V e $b(\cdot)$ uma forma linear contínua, isto é, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|b(v)| \leq M\|v\|; \ \text{ para todo } \ v \in V.$$

Estamos interessados em problemas com a seguinte formulação:

Problema 1 : *Encontrar $u \in K$ tal que*

$$a(u, v - u) \geq b(v - u); \quad \textit{para todo } \ v \in K. \tag{4}$$

Tais problemas são denominados de desigualdades variacionais.

O Teorema de Lax-Milgram garantirá a resolução do Problema 1 quando tivermos $K = V$.

Teorema 1 (Lax-Milgram) *Sejam $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, um espaço de Hilbert, $a(\cdot,\cdot)$, uma forma bilinear contínua e coerciva e $F \in V^*$, um funcional linear contínuo. Então, existe um único $u \in V$ tal que*

$$a(u, v) = F(v); \quad \textit{para todo } \ v \in V.$$

Quando $K = V$, se tomarmos em (4), $v = u + w$ e $v = u - w$, podemos reescrever o Problema 1 como:

Problema 2 : *Encontrar $u \in V$ tal que*

$$a(u, w) = b(w); \quad \textit{para todo } \ w \in V.$$

Portanto, como $b(\cdot) \in V^*$, pelo Teorema de Lax-Milgram existe uma única solução do Problema 2. Apresentaremos os seguintes resultados:

1. Se K é um conjunto fechado e convexo de V e $a(\cdot,\cdot)$ é coerciva, ou seja, $\exists\, \alpha > 0$, tal que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2; \quad \text{para todo } \ v \in V, \tag{5}$$

   então o Problema 1 tem solução única.

2. Se K não for limitado, daremos condições suficientes para existência de solução através da redução do problema em K não limitado a um problema num conjunto convexo e limitado.

2.2 Formas Coercivas

Assumiremos nesta seção que $a(\cdot,\cdot)$ é coerciva e provaremos:

Teorema 2 (Lions-Stampacchia) *Sejam $a(\cdot,\cdot)$ uma forma bilinear satisfazendo (3) e (5), K um subconjunto convexo e fechado de V e $b(\cdot)$ uma forma linear contínua. Então, existe uma única solução $u \in K$ do Problema 1. Além disso, a aplicação (em geral não linear) de V^* em V que associa a cada forma linear $b(\cdot)$ a solução u do Problema 1 é contínua.*

A demonstração do Teorema 2 será dividida em três partes. Mostraremos inicialmente a unicidade e a continuidade da solução com relação a $b(\cdot)$. A existência será provada para o caso particular em que $a(\cdot,\cdot)$ corresponde ao produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e será estendida para o caso geral através do seguinte lema:

Lema 1 *Seja ρ um número tal que $0 < \rho < 2\alpha/M^2$. Então, existe um θ com $0 < \theta < 1$ tal que*

$$|\langle u, v\rangle - \rho a(u, v)| \leq \theta \|u\| \|v\|; \quad \textit{para todo} \quad u, v \in V. \tag{6}$$

Prova: Fixado $u \in V$, a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ pode ser vista como um elemento de V^*.
Denotemos por $A : V \to V^*$ o operador linear definido por

$$a(u, v) = A(u)(v); \quad \text{para todo } \ v \in V. \tag{7}$$

De modo análogo, como V é um espaço de Hilbert, existe um operador linear $\Lambda : V^* \to V$ tal que para todo $f \in V^*$, temos

$$f(v) = \langle \Lambda(f), v\rangle; \quad \text{para todo } \ v \in V \quad \text{e}$$

$$\|\Lambda\| = \|\Lambda^{-1}\| = 1.$$

Portanto, como $A(u) \in V^*$,

$$|\langle u, v\rangle - \rho a(u, v)| = |\langle u - \rho(\Lambda \circ A)(u), v\rangle| \leq \|u - \rho(\Lambda \circ A)(u)\| \|v\|$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} \|u - \rho(\Lambda \circ A)(u)\|^2 &= \|u\|^2 + \rho^2 \|(\Lambda \circ A)(u)\|^2 - 2\rho\langle(\Lambda \circ A)(u), u\rangle \\ &= \|u\|^2 + \rho^2 \|(\Lambda \circ A)(u)\|^2 - 2\rho a(u, u) \\ &\leq (1 + M^2\rho^2 - 2\alpha\rho)\|u\|^2 \end{aligned}$$

com $M = \|A\|$.

Seja $\theta^2 = 1 + M^2\rho^2 - 2\alpha\rho$. Para obtermos (6), resta apenas mostrarmos que $\theta < 1$. De fato, para ρ escolhido conforme o enunciado,

$$\begin{aligned} \theta^2 &= 1 + M^2\rho^2 - 2\alpha\rho \\ &< 1 + M^2 \frac{2\alpha}{M^2}\rho - 2\alpha\rho = 1. \end{aligned}$$

■

Unicidade e Continuidade. Sejam $u_i,\ \ i = 1, 2$ soluções em K de

$$a(u_i, v - u_i) \geq b_i(v - u_i); \quad \text{para todo} \quad v \in K,\ \ i = 1, 2,$$

com $b_i(\cdot)$, uma forma linear contínua. Fazendo $v = u_2$ na desigualdade obtida para $i = 1,\ v = u_1$ na desigualdade obtida para $i = 2$ e somando, obtemos

$$a(u_1, u_2 - u_1) + a(u_2, u_1 - u_2) \geq b_1(u_2 - u_1) + b_2(u_1 - u_2)$$

$$-a(u_1, u_1 - u_2) - a(-u_2, u_1 - u_2) \geq -b_1(u_1 - u_2) - (-b_2)(u_1 - u_2)$$

$$-a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq -(b_1 - b_2)(u_1 - u_2).$$

Usando (5), segue

$$\alpha\|u_1 - u_2\|^2 \leq \|b_1 - b_2\|_{V^*}\|u_1 - u_2\|,$$

e, portanto,

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\alpha}\|b_1 - b_2\|_{V^*}.$$

Tal desigualdade implica na unicidade de solução e na sua continuidade com relação à forma linear $b(\cdot)$. ■

Para provarmos o Teorema 2 para o caso particular em que $a(\cdot, \cdot)$ é dada pelo produto interno, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, precisaremos da definição de projeção num convexo e de sua caracterização.

Lema 2 *Seja K um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Hilbert V. Então, para cada $v \in V$ existe um único elemento $w \in K$ tal que*

$$\|v - w\| = \inf\{\|v - u\|;\ \ u \in K\}.$$

Tal w é denominado projeção de v em K e é denotado por $w = P_K(v)$ com $P_K : V \to K$, o operador de projeção em K. Além disso, a projeção pode ser caracterizada pelo seguinte lema:

Lema 3 *Seja K um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Hilbert V. Então, $w \in K$ é a projeção de $v \in V$ em K, se e somente se,*

$$\langle w, u - w \rangle \geq \langle v, u - w \rangle; \quad \textit{para todo } \ u \in K.$$

(a) Provemos, agora, o Teorema 2 para o caso particular em que $a(\cdot, \cdot)$ é dada pelo produto interno, $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Queremos encontrar $u \in K$ tal que

$$\langle u, v - u \rangle \geq b(v - u) = \langle \Lambda(b), v - u \rangle; \quad \text{para todo} \quad v \in K,$$

ou seja,

$$\langle u - \Lambda(b), v - u \rangle \geq 0; \quad \text{para todo} \quad v \in K. \tag{8}$$

Como K é fechado e convexo e V é um espaço de Hilbert, pelo Lema 3, a condição (8) nada mais é do que a caracterização de u como a projeção de $\Lambda(b)$ em K. Portanto, a condição (8) é equivalente a

$$\|u - \Lambda(b)\| \leq \|v - \Lambda(b)\|; \quad \text{para todo} \quad v \in K,$$

Pelo Lema 2, existe um único elemento em K que minimiza

$$\|v - \Lambda(b)\|.$$

A solução do Problema 1 é desse modo, dada por

$$u = (P_K \circ \Lambda)(b).$$

■

Podemos, neste momento, observar que a demonstração acima é válida para qualquer produto interno definido em V. Portanto, como toda forma bilinear simétrica, coerciva e contínua define um produto interno em V, acabamos de demonstrar a existência e unicidade do seguinte problema:

Problema 3 : *Encontrar $u \in K$ tal que*

$$a(u, v - u) \geq b(v - u); \quad \textit{para todo } \ v \in K,$$

com $a(\cdot, \cdot)$, uma forma bilinear simétrica, coerciva e contínua.

Na demonstração do caso geral, utilizaremos um teorema de ponto fixo.

Definição 1 *Sejam um espaço de Banach D e uma aplicação $F : D \to D$. Dizemos que $v \in D$ é um ponto fixo de F se*

$$F(v) = v.$$

Definição 2 *Seja U um espaço métrico com métrica $d(\cdot, \cdot)$. Uma aplicação $F : U \to U$ é uma contração, se existe $0 \leq \alpha < 1$, tal que*

$$d(F(u), F(v)) \leq \alpha d(u, v); \quad \textit{para todo } \ u, v \in U.$$

Teorema 3 *Sejam U um espaço métrico completo e $F : U \to U$ uma contração. Então, F admite um único ponto fixo.*

(b) Consideremos, agora, o caso geral. Fixemos ρ como no Lema 1. Para $u \in V$, fixo, definamos $\Phi : V \to V^*$ por

$$\Phi(u)(v) = \langle u, v \rangle - \rho a(u, v) + \rho b(v); \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Então, para $u_1, u_2 \in V$ temos pelo Lema 1,

$$|(\Phi(u_1) - \Phi(u_2))(v)| = |\langle u_1 - u_2, v \rangle - \rho a(u_1 - u_2, v)|$$

$$\leq \theta \|u_1 - u_2\| \|v\|. \tag{9}$$

Pela parte (a) da demonstração do Teorema 2, existe um único $w \in K$ tal que

$$\langle w, v - w \rangle \geq \Phi(u)(v - w); \quad \text{para todo} \quad v \in K,$$

e w é dado por

$$w = (P_K \circ \Lambda \circ \Phi)(u).$$

Podemos desse modo, definir uma aplicação $L : V \to K$ dada por

$$L(u) = (P_K \circ \Lambda \circ \Phi)(u) = w.$$

Tal aplicação satisfaz

$$\begin{aligned}\|L(u_1) - L(u_2)\| &= \|(P_K \circ \Lambda \circ \Phi)(u_1) - (P_K \circ \Lambda \circ \Phi)(u_2)\| \\ &\leq \|(\Lambda \circ \Phi)(u_1) - (\Lambda \circ \Phi)(u_2)\| \\ &= \|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\|_{V^*} \leq \theta\|u_1 - u_2\| \qquad \text{por (9).}\end{aligned}$$

Pelo fato de $\theta < 1$, $L(\cdot)$ é uma contração e, portanto, existe um e apenas um $u \in V$ tal que

$$L(u) = u.$$

Logo, como $L(V) \subset K$, u pertence a K e satisfaz

$$\begin{aligned}\langle u, v-u\rangle &\geq \Phi(u)(v-u) \\ &= \langle u, v-u\rangle - \rho[a(u, v-u) - b(v-u)]; \quad \text{para todo} \quad v \in K.\end{aligned}$$

Segue, pois $\rho > 0$, que u é a solução do Problema 1. ■

Com o operador linear A definido em (7), podemos reescrever o Problema 1 da seguinte forma:

Problema 4 : *Dado $f \in V^*$, encontrar $u \in K$ tal que*

$$A(u)(v-u) \geq f(v-u); \quad \textit{para todo} \quad v \in K,$$

o que é o mesmo que

$$(A(u) - f)(v-u) \geq 0; \quad \textit{para todo} \quad v \in K.$$

Esta última formulação nos induz a analisar a possibilidade de solucionar um problema mais geral como:

Problema 5 : *Encontrar $u \in K$ tal que*

$$T(u)(v-u) \geq 0; \quad \textit{para todo} \quad v \in K \tag{10}$$

sendo $T : K \longrightarrow V^*$, com diferentes hipóteses sobre T, V e K.

Para K subconjunto convexo, limitado, fechado e não-vazio de um espaço de Banach reflexivo V, em [7], as hipóteses (v. definições no Apêndice) sobre T serão pseudomonotonia e limitação enquanto em [8], monotonia e demicontinuidade (ou hemicontinuidade). Além destas hipóteses, diferentes noções de coercividade serão impostas a T quando K não é limitado. Parte da apresentação de [5] é um caso particular da abordagem de [8]. No entanto, em [5] encontramos generalizações do teorema apresentado acima, extensão para o caso em que $\alpha = 0$ (forma não-negativa) e resultados que permitem considerar problemas de evolução (v. [5], p. 511).

2.3 K não limitado

Nesta seção, apresentaremos uma condição necessária e suficiente para que o Problema 5 tenha solução.

Lema 4 *Sejam U um espaço de Banach, reflexivo e separável, $K \subset U$, não vazio, convexo e fechado e $T : K \to U^*$. Então, uma condição necessária e suficiente para que exista uma solução da desigualdade variacional:*

$$\textit{encontrar } u \in K \textit{ tal que } T(u)(v-u) \geq 0, \ \ \forall\, v \in K \tag{11}$$

é que exista um número real $r > 0$ tal que ao menos uma solução da desigualdade

$$\textit{encontrar } u_r \in K_r \textit{ tal que } T(u_r)(v-u_r) \geq 0, \ \forall\, v \in K_r \tag{12}$$

pertença ao interior da bola $B_r(0)$, ou seja,

$$\|u_r\|_U < r, \tag{13}$$

com $K_r = K \cap \overline{B_r(0)}$, e $\overline{B_r(0)} = \{v \in U \ \mid \ \|v\|_U \leq r\}$.

Prova:(v. [7], p. 1190) Para provar que a condição é necessária, basta tomarmos $r > \|u\|$.

Mostremos agora que ela é também suficiente. Seja u_r uma solução da desigualdade (12) que satisfaça (13) e $\tilde{v} \in K$. Pelo fato de u_r pertencer ao interior de $B_r(0)$ existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$w = u_r + \theta(\tilde{v} - u_r) \in B_r(0).$$

Por outro lado, como K é convexo, temos que $w = u_r + \theta(\tilde{v} - u_r) \in K$. Logo, fazendo em (12) $v = w$, temos

$$T(u_r)(\theta(\tilde{v} - u_r)) \geq 0.$$

Dividindo por θ,

$$T(u_r)(\tilde{v} - u_r) \geq 0.$$

Portanto, u_r é solução de (11), isto é, u_r é solução da desigualdade variacional sobre todo o convexo K. ■

Em outras palavras, haverá solução no caso K não limitado se, e somente se, existir uma solução de (12) que seja ponto interior da bola de raio r centrada na origem.

Um exame cuidadoso do lema anterior revela a importância de resultados de existência de solução do Problema 5 (do qual o Problema 1 é um caso particular) para casos em que K é limitado. Se tivermos tais resultados (com hipótese adequadas sobre T e V), teremos garantida a existência de soluções de (12), pois K_r é convexo, limitado, fechado e não-vazio (para r suficientemente grande). Portanto, para garantir a existência de solução do Problema 5, basta exigirmos de T uma condição adicional que garanta que a condição (13) seja satisfeita. Uma noção fraca de coercividade cumprirá este papel como veremos no teorema a seguir.

Definição 3 *Sejam U um espaço de Banach, U^* seu dual topológico, $K \subset U$ um conjunto fechado, convexo e não-vazio e um operador $T : K \to U^*$. Dizemos que o operador T é coercivo em K se existir $v_0 \in K$ tal que*

$$\lim_{\|v\| \to \infty} \frac{T(v)(v - v_0)}{\|v\|} = +\infty; \quad com \ \ v \in K.$$

Suponhamos que T seja um operador coercivo. Neste caso, existe r tal que para todo $v \in K$

$$T(v)(v - v_0) > 0; \quad \text{para todo} \quad \|v\| \geq r, \tag{14}$$

$$K_r \neq \emptyset \ \text{ e}$$

$$\|v_0\| < r.$$

Suponhamos que exista u_r, solução de (12). Se $\|u_r\| \geq r$, teríamos por (14),

$$T(u_r)(v_0 - u_r) < 0,$$

o que contradiria (12). Logo $\|u_r\| < r$, ou seja, temos (13).

Cabe observar que a noção de coercividade apresentada em (5) implica que o operador $T(u) = A(u) - f$ com $a(u, \cdot) = (A(u), \cdot)$ é também coercivo conforme a Definição 3.

3 Problemas de Infiltração

3.1 O problema mais geral

Ao contrário da prática habitual nas Ciências, iniciaremos com um problema mais geral para depois tratarmos do caso particular.

Considere uma base horizontal e impermeável (terreno rochoso, por exemplo), sobre a qual estão situados dois reservatórios de água separados por uma represa natural de material poroso – por exemplo, terra. Assumiremos também que as represas têm água em diferentes níveis em relação a base. A água infiltra do reservatório mais alto para o mais baixo por gravidade. A Figura 2 ilustra a situação.

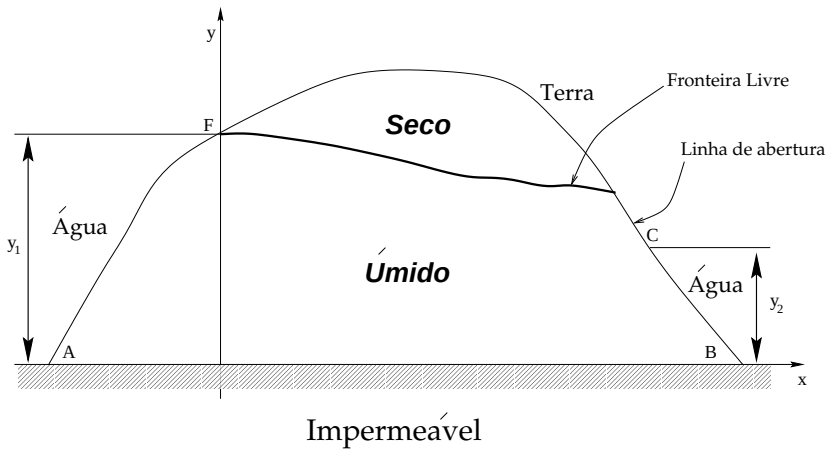

Figura 2: Ilustração do problema.

Há basicamente dois tipos de informação que podemos extrair deste problema: informações *físicas* (como velocidade e pressão, entre outras) e informações *geométricas* (linhas de fluxo ou a porção seca da barreira de terra).

No espírito do nosso trabalho estamos mais interessados no último tipo de dado, o geométrico, embora usemos os primeiros extensivamente.

3.1.1 Descrição do Problema

Faremos algumas hipóteses simplificadoras acerca dos elementos do problema.

Represa É feita de material incompressível, homogêneo e isotrópico. Não há evaporação nem capilaridade.

Água (ou líquido) Também incompressível, irrotacional, estacionário e bidimensional[1].

Uma caracterização mais precisa da geometria do problema é dada a seguir. Acompanhe a notação na Figura 3.

- Sejam a, b, c, y_1 e y_2, reais, tais que $a < 0 < c < b$ e $0 < y_2 < y_1$;
- Seja $Y \in \mathcal{C}^3([a,b])$ uma função côncava tal que $Y(a) = Y(b) = 0$, $Y(0) = y_1$, $Y(c) = y_2$ e $Y'(0) \geq 0$;
- Denominaremos o conjunto $D = \{(x,y) \in R^2 : a < x < b \text{ e } 0 < y < Y(x)\}$ de *represa*;
- Definiremos ainda partições de D: $D_1 = \{(x,y) \in D : a < x < 0\}$, $D_2 = \{(x,y) \in D : c < x < b\}$, $D_3 = \{(x,y) \in D : 0 < x < c\}$;
- E fronteiras $\Gamma_0 = \{(x,0) : a < x < b\}$, $\Gamma = \{(x, Y(x)) : a < x < b\}$, $\Gamma_1 = \{(x, Y(x)) : a < x < 0\}$, $\Gamma_2 = \{(x, Y(x)) : c < x < b\}$ e finalmente $\Gamma_3 = \{(x, Y(x)) : 0 < x < c\}$.

A fronteira livre (que será uma das incógnitas de nosso problema) é representada pela linha mais escura onde $y = \phi(x)$. Denominaremos a porção acima da fronteira livre ($y > \phi(x)$) de *porção seca* e a parte abaixo da fronteira livre ($y < \phi(x)$) de *porção úmida*. Como de hábito, assumiremos que o referencial de pressão está na atmosfera e vale zero. Portanto, a pressão na parte seca é nula e positiva na parte úmida.

[1] De fato o fenômeno é tridimensional, mas assumamos que sua seção transversal não muda ao longo do eixo perpendicular à página e que este não tem efeito sobre a modelagem.

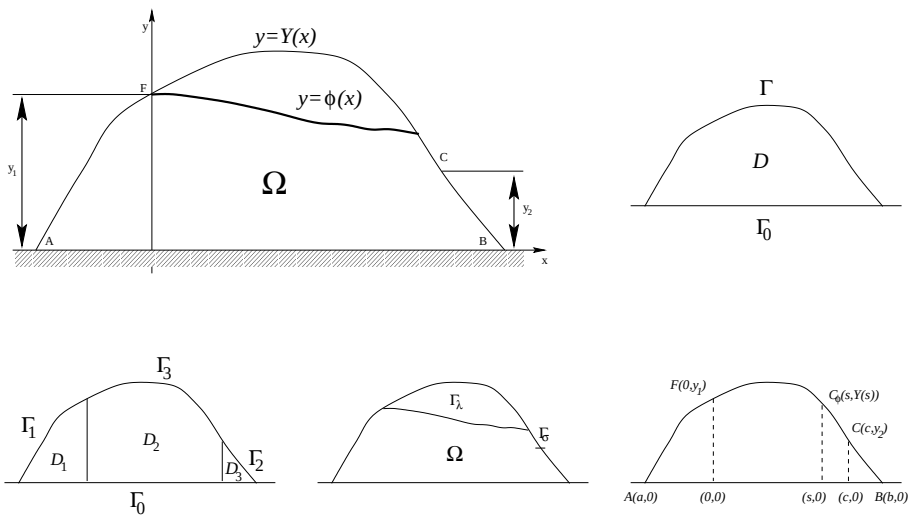

Figura 3: Geometria da represa.

Outra fronteira a ser levada em consideração é a denominada *linha de emersão*, ou *linha de abertura*. Note que esta linha não pode ser ignorada pois nada na geometria ou no fenômeno nos garante que a extremidade da fronteira livre coincida exatamente com o ponto C. Através da linha de abertura a água pode apenas sair.

Estamos agora no ponto em que podemos utilizar as hipóteses do problema e começar sua formulação matemática.

3.1.2 A lei de Darcy

A lei de Darcy governa o fluxo de líquido pela represa. Ela pode ser escrita como

$$\mathbf{v} = -k\nabla\left(y + \frac{p}{\gamma}\right) \tag{15}$$

onde:

- $\mathbf{v}$ é a velocidade do fluido;
- $p = p(x, y)$ é a pressão do líquido;
- γ é seu peso específico e

- k é o coeficiente de permeabilidade.

O coeficiente de permeabilidade k será assumido constante e igual a 1. Note que esta restrição está de acordo com a presumida homogeneidade do meio. Em um próximo passo poder-se-ia considerar $k = k(x, y)$ de forma a levar em conta a estratificação do meio poroso, por exemplo.

O peso específico γ também será tomado igual a 1 sem maiores danos, já que representa basicamente uma propriedade do líquido e pode ser normalizada.

Fazendo

$$u = y + p \tag{16}$$

a lei de Darcy torna-se

$$\mathbf{v} = -\nabla u \quad \text{em } \Omega. \tag{17}$$

Assim colocada, a equação (17) nos diz que u é uma função potencial da velocidade, e portanto as curvas de nível $u(x, y) = \text{cte}$ são linhas equipotenciais.

Finalmente, juntando-se a incompressibilidade do fluido (assumida acima) e a equação geral da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

obtemos

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{18}$$

que juntamente com (17) permite-nos escrever

$$\Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega, \tag{19}$$

ou seja, u é harmônica em Ω.

A função u é também chamada *altura piezométrica*.

Das equações de Cauchy-Riemman sabemos que existe uma função $v = v(x, y)$ harmônica conjugada de u e que deve obedecer

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{20}$$

A função v é conhecida como *função de fluxo* e suas curvas de nível são chamadas de *linhas de fluxo* (que neste caso, por ser irrotacional o fluxo, coincidem com a trajetória das partículas do fluido).

Perceba que $\nabla u \cdot \nabla v = 0$, o que significa que as linhas de fluxo e as linhas equipotenciais formam uma rede. É fácil comprovar este fato:

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

de acordo com (20).

A partir das linhas de fluxo podemos definir outra entidade que denominaremos *tubo de fluxo*, que nada mais é do que a superfície entre duas linhas de fluxo como mostra a Figura 4.

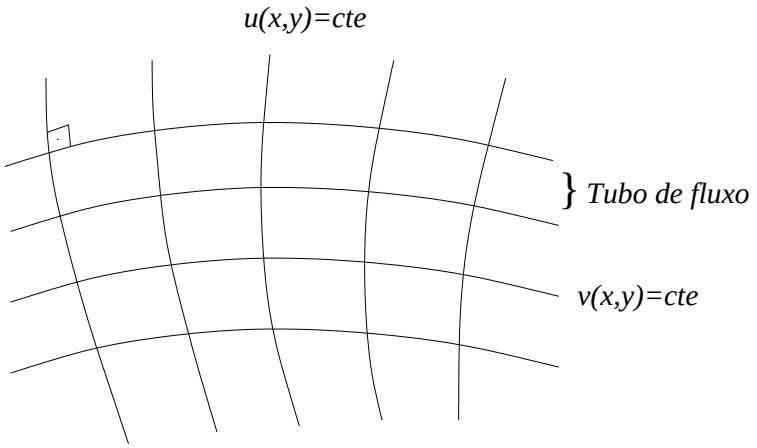

Figura 4: Linhas de fluxo e equipotenciais.

Os tubos de fluxo são independentes e considerados isoladamente dividem o fluxo total em vários fluxos paralelos. Cada um destes tubos de fluxo possui uma capacidade de carga. Desse modo, a capacidade total de carga da represa será calculada por

$$q_d = \int_L \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_L \, dl \tag{21}$$

onde L representa qualquer linha ligando a fronteira inferior (Γ_0) e a fronteira livre ($\phi(x)$) e $\mathbf{n}_L$ é o versor normal a L.

No caso em que L é vertical $\mathbf{n}_L = (1,0)^T$ e $dl = dy$, o que implica que

$$\begin{aligned} q_d = q(x) = \int_L \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}_L\, dl &= \int_0^{\phi(x)} -\frac{\partial u}{\partial x}\, dy \\ &= \int_0^{\phi(x)} -\frac{\partial v}{\partial y}\, dy \Rightarrow q(x) = v|_{\Gamma_0} - v|_{\Gamma_\lambda} \end{aligned} \tag{22}$$

para $0 < x < s$ (a menos de uma constante que pode ser escolhida de maneira que $v = 0$ em Γ_λ).

Faremos agora uma mudança de variáveis de interesse. Até o presente momento desenvolvemos nosso modelo baseados em u e v, mas escolher p como incógnita pode trazer alguns benefícios. Como $u = y + p$, podemos escrever

$$q(x) = \int_0^{\phi(x)} -\frac{\partial u}{\partial x}\, dy = -\int_0^{\phi(x)} \frac{\partial p}{\partial x}\, dy \tag{23}$$

para $0 < x < s$.

Se assumirmos alguma regularidade de p (para que haja uma transição suave entre as porções seca e úmida), podemos escrever

$$q(x) = -\int_0^{\phi(x)} \frac{\partial p}{\partial x}\, dy = -\int_0^{Y(x)} \frac{\partial p}{\partial x}\, dy \tag{24}$$

para $0 < x < s$. Ou seja, estendemos a função de capacidade de carga até a fronteira (agora conhecida) definida por $Y(x)$.

Finalmente, de (16) segue que

$$\Delta p = 0 \quad \text{em } \Omega, \tag{25}$$

e temos que p também é harmônica.

3.1.3 Condições de fronteira

Nas próximas seções introduziremos condições de contorno para a abundância de fronteiras do nosso problema.

Condições na base Γ_0

Como já dissemos anteriormente, a base da represa é constituída de material impermeável, e portanto a componente normal da velocidade em Γ_0 é nula,

o que nos leva a concluir que Γ_0 é uma das linhas de fluxo.

Neste caso podemos tomar $v = \text{cte}$ em Γ_0 ou

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{em } \Gamma_0, \tag{26}$$

já que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Podemos expressar (26) em termos de p como

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -1 \quad \text{em } \Gamma_0, \tag{27}$$

Condições nos reservatórios Γ_1 e Γ_2

Assumindo que a velocidade da água é desprezível em relação a $\mathbf{v}$, podemos dizer que a altura piezométrica u é constante ao longo de Γ_1 e Γ_2.

No caso de Γ_1, perceba que o ponto F está em contato com a atmosfera, e portanto $p = 0$. Juntando-se este fato com (16) concluímos que $u(F) = y_1$. De modo análogo, em Γ_2 vale que $u(F) = y_2$. Reescrevendo tudo em função de p, chegamos às duas condições de fronteira:

$$p = y_1 - y \qquad \text{em } \Gamma_1 \tag{28}$$

$$p = y_2 - y \qquad \text{em } \Gamma_2. \tag{29}$$

A linha de emersão Γ_σ

A linha de emersão está em contato com o ar, e portanto $p = 0$ neste caso. Usando a relação (16) concluímos que $u = y$ em Γ_σ. Infelizmente não conseguimos reduzir Γ_σ a nenhuma das entidades geométricas conhecidas (linhas de fluxo ou equipotenciais). Portanto, lembrando que uma das hipóteses sobre a linha de emersão era o fato da água apenas sair, temos

$$\frac{\partial u}{\partial n} \leq 0 \quad \text{em } \Gamma_\sigma, \tag{30}$$

ou, através de (16)

$$\frac{\partial}{\partial n}(p + y) \leq 0 \quad \text{em } \Gamma_\sigma. \tag{31}$$

A fronteira livre Γ_λ

Aqui diversas condições podem ser escolhidas (vide [1]). Como a fronteira livre está também em contato com o ar, escolheremos condições muito próximas às da linha de emersão. Assim, em Γ_λ

$$\frac{\partial}{\partial n}(p+y) = 0 \tag{32}$$

$$p = 0 \tag{33}$$

3.2 O primeiro problema

Todas as condições colocadas até agora nos levam ao seguinte problema:

Problema 6 : *Encontrar* p *e* $\Omega \subset D$ *aberto tais que*

$$\Delta p = 0 \quad em\ \Omega \tag{34}$$

$$p = y_1 - y \quad em\ \Gamma_1 \tag{35}$$

$$p = y_2 - y \quad em\ \Gamma_2 \tag{36}$$

$$p = 0 \quad em\ \Gamma_\sigma \tag{37}$$

$$p = 0 \quad em\ \Gamma_\lambda \tag{38}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(p+y) = 0 \quad em\ \Gamma_\lambda \tag{39}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -1 \quad em\ \Gamma_0 \tag{40}$$

Podemos também expressar o Problema 6 na variável u:

Problema 7 : *Encontrar* u *e* $\Omega \subset D$ *aberto tais que*

$$\Delta u = 0 \quad em\ \Omega \tag{41}$$

$$u = y_1 \quad em\ \Gamma_1 \tag{42}$$

$$u = y_2 \quad em\ \Gamma_2 \tag{43}$$

$$u = y \quad em\ \Gamma_\sigma \tag{44}$$

$$u = y \quad em\ \Gamma_\lambda \tag{45}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad em\ \Gamma_\lambda \tag{46}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad em\ \Gamma_0 \tag{47}$$

3.3 O Caso particular

Até aqui modelamos o problema de infiltração no caso mais genérico, onde consideramos que o meio poroso poderia ser representado por uma curva $y = Y(x)$. Vamos nos ater agora ao caso em que temos um reservatório de paredes verticais. A essência do problema não muda, apenas podemos elaborar de maneira mais simples a parte matemática. A Figura 5 resume a geometria do problema.

Do ponto de vista das equações nada mudou. A geometria mais simples implica apenas em uma maior facilidade no trato das condições de fronteira (desejável, por exemplo, quando se trabalha com Diferenças Finitas).

Lema 5 $p > 0$ *em* Ω.

Suponha que exista u solução do problema. Já mostramos que $\Delta p = 0$ (p é harmônica). Como $p = 0$ em $\Gamma_\lambda \cup \Gamma_\sigma$ e $p > 0$ em $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e $\dfrac{\partial p}{\partial y} = -1$ em Γ_0, temos que p é estritamente decrescente, o que por sua vez implica que p não pode assumir valores negativos em Ω. ■

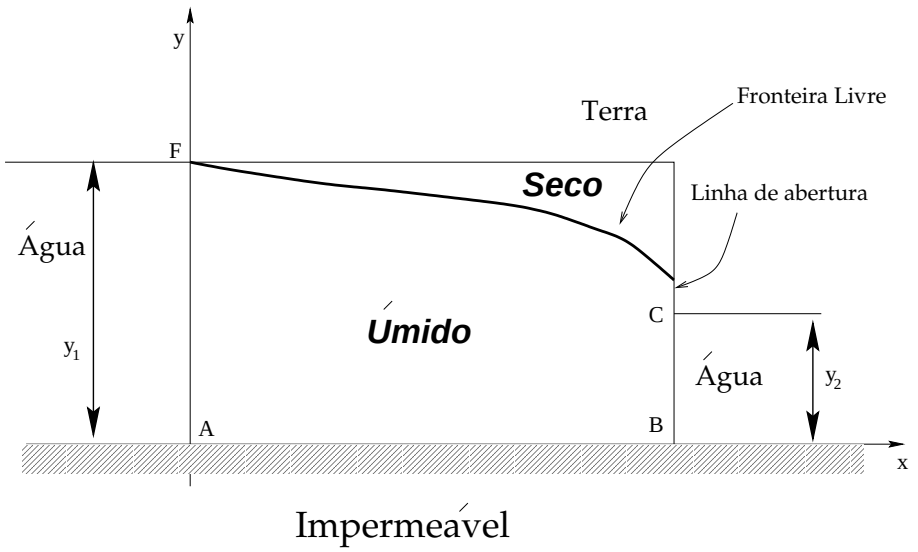

Figura 5: A geometria do problema particular.

Vamos agora transformar o problema através da criação de uma função associada (o motivo desta transformação será explicado adiante). Assuma então que $\phi \in \mathcal{C}^1([0,b])$, $u \in \mathcal{C}(\Omega \cup \Gamma_\lambda) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$.

Faremos a seguinte mudança de variáveis:

$$U(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\int_y^{\phi(x)} (u(x,t) - t)\, dt & \text{se } 0 \leq y \leq \phi(x) \\ 0 & \text{se } \phi(x) < y < H. \end{cases} \tag{48}$$

Podemos então calcular:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= -u(x,y) + y \\ \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) &= \int_y^{\phi(x)} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\, dt \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y) &= \int_y^{\phi(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\, dt + \phi'(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,\phi(x)) \end{aligned} \tag{49}$$

Como $\nabla u \perp (-\phi'(x), 1)^T$ vale $-\phi'(x)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ em $y = \phi(x)$ e

$$\int_y^{\phi(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\, dt = -\int_y^{\phi(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,t)\, dt = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,\phi(y)) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y),$$

encontramos que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 1.$$

Dessa maneira concluímos que U satisfaz

$$-\Delta U = -1 \quad \text{em } \Omega. \tag{50}$$

E mais, como $p > 0$ em Ω, isso implica que $U > 0$ em Ω.
Já no domínio todo, exceto em Ω, $U \equiv 0$ e portanto $-\Delta U = 0 > -1$.
Finalmente, vamos acertar as condições de fronteira para a nova variável.

$$\Gamma_1 \;\rightarrow\; U(0,y) = \textstyle\int_y^{y_1} y_1 - t\, dt = \frac{1}{2}(y_1 - y)^2$$

$$\Gamma_2 \;\rightarrow\; U(b,y) = \textstyle\int_y^{y_2} y_2 - t\, dt = \frac{1}{2}(y_2 - y)^2.$$

Em Γ_0 temos a relação

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial p}{\partial y}(x,0) + 1 = -1 + 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y) = 0 \Rightarrow U(x,0) = \frac{y_1^2}{2}\left(1 - \frac{x}{b}\right) + \frac{y_2^2}{2}\frac{x}{b}$$

e como $p \equiv 0$ no resto de D, então idem para U.

Chegamos então ao seguinte problema na variável U:

Problema 8 : *Encontrar* U *e* $\Omega \subset D$ *aberto tais que*

$$-\Delta U \geq -1 \quad em\ D \tag{51}$$

$$U = \frac{1}{2}(y_1 - y)^2 \quad em\ \Gamma_1 \tag{52}$$

$$U = \frac{1}{2}(y_2 - y)^2 \quad em\ \Gamma_2 \tag{53}$$

$$U = \frac{y_1^2}{2}\left(1 - \frac{x}{b}\right) + \frac{y_2^2}{2}\frac{x}{b} \quad em\ \Gamma_0 \tag{54}$$

$$U = 0 \quad em\ \partial D \backslash (\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2) \tag{55}$$

O próximo lema explica o porquê da escolha de uma variável auxiliar U para resolução do problema de infiltração.

Lema 6 *A solução* u *do Problema 7 satisfaz*

$$\int_D \nabla u \nabla \xi \ dw = 0, \ \ \forall \xi \in \mathcal{C}^1(D)$$

com $\xi = 0$ *numa vizinhança de* $\partial\Omega \cap \{x = 0\}$ *e* $\partial\Omega \cap \{x = b\}$.

Usando integração por partes temos

$$-\int_\Omega \Delta u \xi \ dw = \int_\Omega \nabla u \nabla \xi \ dw - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \xi \ ds.$$

Sendo u solução do Problema 7, então $\Delta u = 0$ e portanto

$$0 = -\int_\Omega \Delta u \xi \ dw = \int_\Omega \nabla u \nabla \xi \ dw.$$

■

Verifiquemos agora quais desigualdades variacionais u e p satisfazem.

Seja agora $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(D)$. Então, pelo lema anterior,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \nabla u \nabla \psi \ dw = \int_D \nabla u \nabla \psi \ dw - \int_{D\setminus\Omega} \nabla u \nabla \psi \ dw \\ &= \int_D \nabla u \nabla \psi \ dw - \int_{D\setminus\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial y} \ dw \\ &= \int_D \left[\nabla u \nabla \psi - \chi_{D\setminus\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] \ dw, \end{aligned}$$

onde $\chi_A x = 1$ se $x \in A$ e 0 caso contrário.

Em termos da pressão, podemos escrever:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \nabla(p+y) \nabla \psi \ dw = \int_D \nabla(p+y) \nabla \psi \ dw - \int_{D\setminus\Omega} \nabla(p+y) \nabla \psi \ dw \\ &= \int_D \nabla(p+y) \nabla \psi \ dw - \int_{D\setminus\Omega} \nabla y \nabla \psi \ dw \\ &= \int_D [\nabla p + \nabla y - (1-\chi_\Omega) \nabla y] \nabla \psi \ dw \\ &= \int_D [\nabla p - \chi_\Omega \nabla y] \nabla \psi \ dw, \end{aligned}$$

ou, analogamente

$$-\Delta u = -\frac{\partial \chi_{D\setminus\Omega}}{\partial y} \quad \text{em } \mathcal{D}'(D).$$

Equivalentemente

$$-\Delta p = -\frac{\partial \chi_\Omega}{\partial y} \quad \text{em } \mathcal{D}'(D).$$

Neste momento, fica claro que não conseguiremos obter para os problemas acima formulações variacionais que envolvam espaços de Sobolev, pois os lados direitos das expressões acima correspondem a funcionais que não possuem representação em nenhum espaço L^p. A idéia da criação de U é justamente aumentar a regularidade da solução de forma a permitir uma solução em algum espaço de Sobolev.

Definamos o conjunto

$K = \{ \ v \in H^2(D) \ / \ v$ satisfaz mesmas condições de fronteira que U e $v \geq 0$ em $D\}$.

temos que U é solução da seguinte desigualdade variacional: Encontrar $U \in K$ tal que

$$\int_D \nabla U \cdot \nabla(v-U)\, dw \geq -\int_D (v-U)\, dw \quad , \quad \forall v \in K. \tag{56}$$

Para demonstrar tal fato, usaremos o seguinte resultado

Lema 7 *Sejam U como definida anteriormente e $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(D)$ que se anula em uma vizinhança de $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Então*

$$\int_D \nabla U \nabla \zeta \;\; dw + \int_D \chi_\Omega \zeta \;\; dw = 0.$$

Prova: Seja $\Pi(x,y) = \int_0^y \zeta(x,t)dt$.

$$\begin{aligned}
\int_D \nabla U \nabla \zeta \, dw &= \int_\Omega \nabla U \nabla \zeta \, dw \\
&= \int_\Omega \left[\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \right] dw \\
&= \int_\Omega \left[-\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \right] dw + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial x} n_y ds \\
&= \int_\Omega \frac{\partial U}{\partial y} \Delta \Pi \, dw - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial x} n_x ds \\
&= \int_\Omega \frac{\partial U}{\partial y} \Delta \Pi \, dw.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 6 e (49), temos

$$\begin{aligned}
\int_D \nabla U \nabla \zeta \, dw &= \int_\Omega (y-u) \Delta \Pi \, dw \\
&= -\int_\Omega \nabla y \nabla \Pi \, dw + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Pi}{\partial n} y ds \\
&\quad + \int_\Omega \nabla u \nabla \Pi \, dw - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Pi}{\partial n} u ds \\
&= -\int_\Omega \frac{\partial \Pi}{\partial y} \, dw = -\int_\Omega \zeta \, dw \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Para toda função $v \in K$ temos, pelo fato de U também pertencer a K, que $v - U$ pertence a $H_0^1(\Omega)$. Portanto $v - U$ sempre pode ser aproximada por funções que satisfazem as hipóteses do Lema 6. Desse modo,

$$\begin{aligned}\int_D \nabla U \nabla (v-U)\, dw &= -\int_\Omega (v-U)\, dw \\ &= -\int_D (v-U)\, dw + \int_{D\ \Omega} (v-U)\, dw \\ &= -\int_D (v-U)\, dw + \int_{D\ \Omega} v\, dw\end{aligned}$$

como $v \in K$,

$$\int_D \nabla U \nabla (v-U)\, dw \geq \int_D (v-U) dxdy.$$

Finalmente, temos que o Teorema 2 de Lions-Stampacchia garante a existência e a unicidade da solução da desigualdade acima, o que implica também na existência e unicidade da solução do Problema 6 pelo menos num sentido generalizado. Com alguns resultados de regularidade da solução w da desigualdade variacional acima, é possível obtermos uma solução num sentido clássico.

Para verificar a coercividade da forma bilinear envolvida, utilizaremos a desigualdade de Poincaré.

Definição 4 *Seja Ω um subconjunto conexo e aberto do $\mathbb{R}^n$. Dizemos que a fronteira de Ω é Lipschitziana se para $x_0 \in \partial\Omega$, existe um sistema de coordenadas $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\epsilon > 0$ e uma função f tal que a intersecção $\partial\Omega \cap B(x_0, \epsilon)$, com $B(x_0, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < \epsilon\}$ possa ser expressa como*

$$\xi_1 = f(\xi_2, \ldots, \xi_n)$$

e f seja Lipschitz, ou seja, existe uma constante k tal que

$$|f(\vec{\xi}) - f(\vec{\eta})| < k|\vec{\xi} - \vec{\eta}|$$

com $\vec{\xi} = (\xi_2, \ldots, \xi_n)$ e $\vec{\eta} = (\eta_2, \ldots, \eta_n)$.

Teorema 4 (Desigualdade de Poincaré) *Seja Ω um subconjunto conexo e aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Lipschitziana. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\|u\|_{H^1}^2 \leq C\|\nabla u\|_{L_2}^2.$$

Para verificar que de fato o problema definido para U em (56) tem uma única solução, consideremos o seguinte problema:

Encontrar $\tilde{u} \in \tilde{K} = \{v \in H_0^1(D);\ v \geq 0\}$ tal que

$$a(\tilde{u}, \tilde{v} - \tilde{u}) \geq b(\tilde{v} - \tilde{u}), \forall\ \tilde{v} \in \tilde{K} \tag{57}$$

com $a(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_D \nabla\tilde{u}\nabla\tilde{v}dxdy$, $b(\tilde{u}) = \int_D \chi_\Omega\tilde{u}dxdy - a(\overline{g}, \tilde{u})$ e $\tilde{u} = u - \overline{g}$, $\forall\ u \in H^1(D)$, com $\overline{g} \in H^1(D)$, tal que $g|_{\partial\Omega} = g$.

Pela desigualdade de Poincaré, $a(\cdot, \cdot)$ é coerciva em $\tilde{K}$. Como as demais hipóteses do teorema de Lions-Stampacchia estão claramente satisfeitas, (57) tem solução única.

Observemos agora, que se U soluciona o problema definido em (56), temos para $\forall\ v \in K$

$$a(U, v - U) \geq \int_D \chi_\Omega(v - U)dxdy$$

$$a(U - \overline{g}, v - \overline{g} - (U - \overline{g})) + a(\overline{g}, v - \overline{g} - (U - \overline{g})) \geq \int_D \chi_\Omega(v - \overline{g} - (U - \overline{g}))dxdy$$

como $v, U \in K \Rightarrow \tilde{v}, \tilde{U} \in \tilde{K}$, temos

$$a(\tilde{U}, \tilde{v} - \tilde{U}) \geq b(\tilde{v} - \tilde{U}),\ \forall\ \tilde{v} \in \tilde{K}.$$

Ou seja, $U - \overline{g}$ é solução de (57).

Analogamente, se $\tilde{u} = u - \overline{g}$ soluciona (57), $U = u$ é solução do problema formulado para U em (56).

Portanto, da existência e unicidade de solução do problema (57), segue a existência e unicidade de solução do problema formulado para U em (56).

4 Resolução Numérica

O primeiro passo para a resolução numérica do problema (57) é representá-lo como um problema de dimensão finita. Para tanto, utilizamos o Método de Elementos Finitos, de onde obtemos uma desigualdade variacional, porém desta vez, discretizada. O problema assim discretizado terá sua solução aproximada por um método de penalização a ser posteriormente descrito.

4.1 Formulação Discreta

Seja T_h uma triangulação sobre o domínio D e $L(T_h)$ o espaço de elementos finitos de Lagrange (de ordem 1, 2 ou 3). Denotaremos a base de $L(T_h)$ por $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$.

Definimos o seguinte conjunto convexo K_h em $L(T_h)$ por

$$K_h = \{\, u_h = \sum_j u_j \varphi_j \in L(T_h) : u_h \geq 0 \text{ em } D \text{ e satisfazendo (52)-(55) em } \partial D\}. \tag{58}$$

Note que aqui, diferentemente do caso de equações variacionais, não tomamos as funções testes iguais às funções de base. Este fato se justifica pois K_h não é um subespaço de $L(T_h)$. Para as funções de testes mais comuns de elementos finitos não temos automaticamente esta garantia.

Estamos preparados agora para formular o problema de inequação variacional discreto:

Problema 9 (VIP_h): *Encontrar $u_h^\star \in K_h$, solução da desigualdade variacional*

$$a(u_h, v_h - u_h) \geq b(v_h - u_h), \forall v_h \in K_h.$$

Substituindo-se $u_h = \sum_j u_j \varphi_j$ e $v_h = \sum_j v_j \varphi_j$, com u_h e $v_h \in K_h$, em VIP_h temos

$$\begin{aligned} a(\sum_j u_j \varphi_j, \sum_i (v_i - u_i)\varphi_i) &\geq b(\sum_i (v_i - u_i)\varphi_i) \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \sum_j \sum_i u_j (v_i - u_i) a(\varphi_i, \varphi_j) &\geq \sum_i (v_i - u_i) b(\varphi_i) \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Definindo-se $x, y, c, d \in I\!R^n$ e $A \in I\!R^{n\times n}$ como

$$x = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad y = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$
$$d = (b(\varphi_1), b(\varphi_2), \ldots, b(\varphi_n))$$

e $A = [a_{ij}]$ com $a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$, escrevemos o problema (57) como

Problema 10 *(VIP_h): Encontrar $x^\star \in S$, solução de*

$$(y - x)^T Ax \geq d^T(y - x), \forall y \in S,$$

onde $S = \{y \in I\!R^n, y \geq 0\}$.

Podemos reescrever o **problema 10** como

$$\begin{aligned} x^T A^T(y - x) &\geq d^T(y - x) \\ x^T A^T y - d^T y &\geq x^T A^T x - d^T x \\ (Ax - d)^T y &\geq (Ax - d)^T x \qquad y \geq 0. \end{aligned}$$

Uma condição suficiente para a existência e unicidade da solução do problema acima nos leva exatamente a considerar a solução de um tipo de problema denominado *problema de complementaridade linear*. Resolvendo o problema de complementaridade abaixo resolvemos automaticamente o **problema 10**.

Problema 11 *(LCP): Encontrar $x^\star \in S$, solução de*

$$\begin{cases} Ax \geq d \\ x \geq 0 \\ (Ax - d)^T x = 0. \end{cases}$$

Note que a existência e unicidade da solução do problema VIP_h e conseqüentemente de LCP vêm da existência e unicidade do problema (57), dada pelo teorema de Lions-Stampacchia (teorema 2).

4.2 Método de Penalização

O **problema 11** terá sua solução aproximada através de um método de Penalização.

Os métodos de Penalização têm sua aplicação básica na minimização de funcionais com restrições. Se a forma bilinear envolvida em problemas de equações e inequações variacionais for simétrica, sabemos da teoria que estes problemas são equivalentes respectivamente à minimização de funcionais irrestritos e com restrições.

Portanto, dadas as condições de nosso problemas, iremos aproximar sua solução utilizando um método de Penalização.

Estes métodos baseiam-se na inclusão de um funcional de penalização ao funcional original que se deseja minimizar. Este funcional é tal que seu valor aumenta tanto mais quanto a restrição é violada.

Os próximos teoremas (cujas demonstrações encontram-se em [6]) caracterizam ponto de mínimo de um funcional em um conjunto convexo e quais as condições que o funcional de penalização deve satisfazer.

Teorema 5 *Seja $J : U \to K$ com U espaço de Banach e $K \subset U$ um subconjunto convexo. O funcional J é coercivo, convexo e G-diferenciável em K. Então J possui um mínimo em K. Além disso, se J é estritamente convexo, o ponto de mínimo é único.*

Teorema 6 *Sejam V um espaço de Hilbert, $K \subset V$, convexo e $J : K \to I\!R$ um funcional G-diferenciável em K. Então $u^\star$, mínimo de J é caracterizado por:*

$$\langle \nabla J(u^\star), v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K.$$

Estamos agora no ponto de criar um novo funcional que consiste de duas partes: o funcional original e um funcional de penalização. O novo funcional será definido sobre V como:

$$J_\epsilon(u) = J(v) + \frac{1}{\epsilon} P(v), \quad \epsilon > 0 \tag{59}$$

com o funcional P satisfazendo as seguintes propriedades:

- P é fracamente semicontínuo inferior;
- $P(u) \geq 0$ e $P(u) = 0$ se e somente se $u \in K$;
- P é G-diferenciável em V.

Perceba que com esta definição J_ϵ é coercivo, fracamente semicontínuo inferiormente e G-diferenciável. Logo, J_ϵ possui um ponto de mínimo em V, ou seja, existe $u_\epsilon \in V$ tal que

$$J_\epsilon(u_\epsilon) = \min_{u \in V} J_\epsilon(u).$$

Com isto podemos enunciar o teorema central desta seção:

Teorema 7 *Seja U um espaço de Banach reflexivo e $J : U \to \mathbb{R}$ um funcional coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente, $K \subset U$ convexo e $P : U \to \mathbb{R}$ um funcional de penalização satisfazendo as propriedades acima. Então, dado $\epsilon > 0$, existe um ponto de mínimo $u_\epsilon \in U$ de J_ϵ. Também existe uma subseqüência (u_ϵ) destas soluções que converge fracamente a $u \in U$, onde*

$$u \in K \text{ tal que } J(u) = \inf_{v \in K} J(v).$$

O operador de penalização usado será

$$P(\tilde{u}_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\langle \tilde{u}_\epsilon, v \rangle \quad \text{onde} \quad \tilde{u}_\epsilon = \begin{cases} 0 & u_\epsilon \in K, \\ u_\epsilon & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

que satisfaz as condições necessárias para o operador de penalização.

Segue o algoritmo completo de penalização.

Algoritmo para o Método de Penalização

Passo 1: Dados $x^0 \in \mathbb{R}^n$ (aproximação inicial), $d \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, p, vetor de zeros e uns, $\epsilon_p = 0.1$ parâmetro de penalização inicial, ϵ, tolerância global, e $k = 0$, contador de iterações, faça:

Passo 2: Encontrando violações Para $i = 1, 2, \ldots, n$, faça:

Passo 2.1: Tome $p_i = 0$. Se $x_i^{(k)} < 0$, tome $p_i = 1$ (penalização).

Passo 3: Faça:

Passo 3.1: Tome $x^{(k+1)}$ solução de

$$Ax + \frac{1}{\epsilon_p}\tilde{x} = d,$$

onde

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i & \text{se } p_i = 1 \\ 0 & \text{se } p_i = 0 \end{cases}$$

Passo 3.2: Se $||x^{k+1} - x^k|| > \epsilon$, faça $\epsilon_p = \frac{\epsilon_p}{10}$, $k = k + 1$ e volte ao passo 2.

4.3 Resultados Numéricos

Aqui serão apresentados alguns resultados obtidos para o problema de infiltração. No primeiro experimento resolvemos para um domínio retangular com 5 unidades de largura, discretizado uniformemente com $h_x = h_y = 0.25$. A massa de água maior está a 10 unidades da base impermeável e a menor a 2 unidades. A tolerância global é $\epsilon = 10^{-5}$ e o critério de parada é o do passo 3.2 do algoritmo acima. Os gráficos da soluções podem ser apreciados ao final do texto. Também é apresentado o valor da complementaridade $|x^T(Ax - d)|$. O tempo de execução é relativo a um Pentium 200MHz com 128M de memória. O compilador usado foi o `GNU g++` rodando sobre Linux.

A tabela a seguir resume alguns dados da simulação.

Experimento 1	
Número de iterações	2
ϵ_p (parâmetro de penalização final)	0.01
$\|x^{k+1} - x^k\|$ (critério de parada)	$1.525 * 10^{-5}$
$\|x^T(Ax - d)\|$ (complementaridade)	$1.155 * 10^{-4}$
Tempo de execução (segundos)	0.68

Tabela 1: Resultados para simulação usando método de Penalização com $\epsilon = 10^{-5}$ e parada por proximidade de iterações sucessivas.

Fizemos também experimentos com $\epsilon = 10^{-5}$, porém usando como critério de parada a valor absoluto da complementaridade e curiosamente o método de penalização não apresentou bons resultados. O método terminou por atingir o número máximo de iterações. Acompanhe a próxima tabela.

Experimento 2	
Número de iterações	3705
ϵ_p (parâmetro de penalização final)	10^{-16}
$\|x^{k+1} - x^k\|$ (critério de parada)	$3.8147 * 10^{-6}$
$\|x^T(Ax - d)\|$ (complementaridade)	$5.398 * 10^{-5}$
Tempo de execução (segundos)	76.1

Tabela 2: Resultados para simulação usando método de Penalização com $\epsilon = 10^{-5}$ e parada por erro de complementaridade.

A título de comparação implementamos também o método SSORP (*sucessive symmetric overrelaxation with projection*), apresentado resumidamente em [4]. O algoritmo SSORP pode ser esquematizado como:

Algoritmo SSORP

Passo 1: Dados $x^0 \in I\!R^n$ (aproximação inicial), $d \in I\!R^n$, $A \in I\!R^{n\times n}$, w parâmetro de relaxação, ϵ, tolerância global e $k = 0$ contador de iterações, faça:

Passo 2.1: Tome

$$x_i^{k+\frac{1}{2}} = \max\left\{x_i^k - w\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j<i} a_{ij}x_j^{k+\frac{1}{2}} + \sum_{j\geq i} a_{ij}x_j^k - d_i\right), 0\right\},$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Passo 2.2: Tome

$$x_i^{k+1} = \max\left\{x_i^{k+\frac{1}{2}} - w\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j\leq i} a_{ij}x_j^{k+\frac{1}{2}} + \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{k+1} - d_i\right), 0\right\},$$
$$i = n, n-1, \ldots, 1$$

Passo 3: Se $||x^{k+1} - x^k|| > \epsilon$, faça $k = k + 1$ e volte ao passo 2.1.

Os resultados para uma discretização com $h_x = h_y = 0.1$, tanto para SSORP como Penalização podem ser apreciados na seqüência.

Experimento 3		
	Penalização	SSORP
Número de iterações	7	175
$\|\|x^{k+1} - x^k\|\|$ (critério de parada)	$7.629 * 10^{-6}$	$9.536 * 10^{-6}$
$\|x^T(Ax - d)\|$ (complementaridade)	$1.127 * 10^{-5}$	$1.813 * 10^{-6}$
Tempo de execução (segundos)	11.79	31.45

Tabela 3: Comparação de resultados usando Penalização e SSORP com $\epsilon = 10^{-5}$ e parada por proximidade de iterações sucessivas.

Este experimento corrobora nossa hipótese de que o método de Penalização aqui apresentado tem melhor performance que o SSORP. O SSORP porém, não deve ser descartado, pois além de ser de fácil implementação, é bastante robusto.

Por fim, incluímos um experimento onde obtemos a solução aproximada para um domínio quadrado com dimensões 5 unidades de altura por 5 de largura. A discretização foi feita tomando-se uma malha uniforme com $h_x = h_y = 0.05$ unidades. A massa de água maior está a 5 unidades de altura e a menos a 2 unidades de altura. A tabela 4 resume os dados deste experimento.

Experimento 4		
	Penalização	SSORP
Número de iterações	56	145
$\|\|x^{k+1} - x^k\|\|$ (critério de parada)	$9.886 * 10^{-6}$	$9.655 * 10^{-6}$
$\|x^T(Ax - d)\|$ (complementaridade)	$1.927 * 10^{-6}$	$1.871 * 10^{-6}$
Tempo de execução (segundos)	40.5	58.46

Tabela 4: Comparação de resultados usando Penalização e SSORP com $\epsilon = 10^{-5}$ e parada por proximidade de iterações sucessivas.

Apêndice

Definição 5 *Sejam U um espaço de Banach, U^* seu dual topológico. Dizemos que um operador $T : U \to U^*$ é monótono se*

$$(T(u) - T(v))(u - v) \geq 0; \quad \textit{para todo } \ u, v \in U$$

Definição 6 *Sejam U um espaço de Banach, U^* seu dual topológico e $K \subset U$ um conjunto convexo e fechado. Dizemos que um operador $A : K \to U^*$ é pseudomonótono se para toda sequência $(u_m) \subset K$ que converge na topologia fraca para $u \in K$ e é tal que $\limsup A(u_m)(u_m - u) \leq 0$, tivermos,*

$$\liminf A(u_m)(u_m - v) \geq A(u)(u - v), \ \forall \ v \in U.$$

Definição 7 *Sejam U um espaço de Banach, U^* seu dual topológico e K um subconjunto convexo de U. Dizemos que $T : K \to U^*$ é hemicontínua se T é contínua em todos os segmentos contidos em K. Ou seja, se a aplicação de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$ definida para $t \in [0, 1]$ por*

$$T(tu + (1 - t)v)(u - v), \quad \textit{com} \quad u, v \in K$$

é contínua em $[0, 1]$.

Definição 8 *Sejam U um espaço de Banach e $K \subset U$ um conjunto convexo e fechado. Dizemos que um operador $A : K \to U^*$ é demicontínuo se, e somente se, para toda sequência $(u_n) \subset K$, que convirja para u na norma, tenhamos a convergência fraca*

$$A(u_n) \xrightarrow{\omega} A(u).$$

Definição 9 *Seja V um espaço de Hilbert e $K \subset V$ um subconjunto convexo de V. Dizemos em um funcional $J \in V'$ é Gateaux-Diferenciável (ou simplesmente G-Diferenciável) em um ponto $u \in K$ se existe um elemento de V' que denotaremos por ∇J tal que*

$$\lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} J(u + \lambda v) \right) = \langle \nabla J(u), v \rangle; \quad \forall v \in K.$$

Definição 10 *Seja V um espaço de Hilbert e $K \subset V$ um subconjunto convexo de V. Dizemos em um funcional $J \in V'$ é fracamente contínuo inferiormente em K se para toda seqüência $(u_n) \subset K$, $u_n \xrightarrow{\omega} u \in K$, tem-se*

$$\lim_{n \to \infty} \inf \ J(u_n) \geq J(u).$$

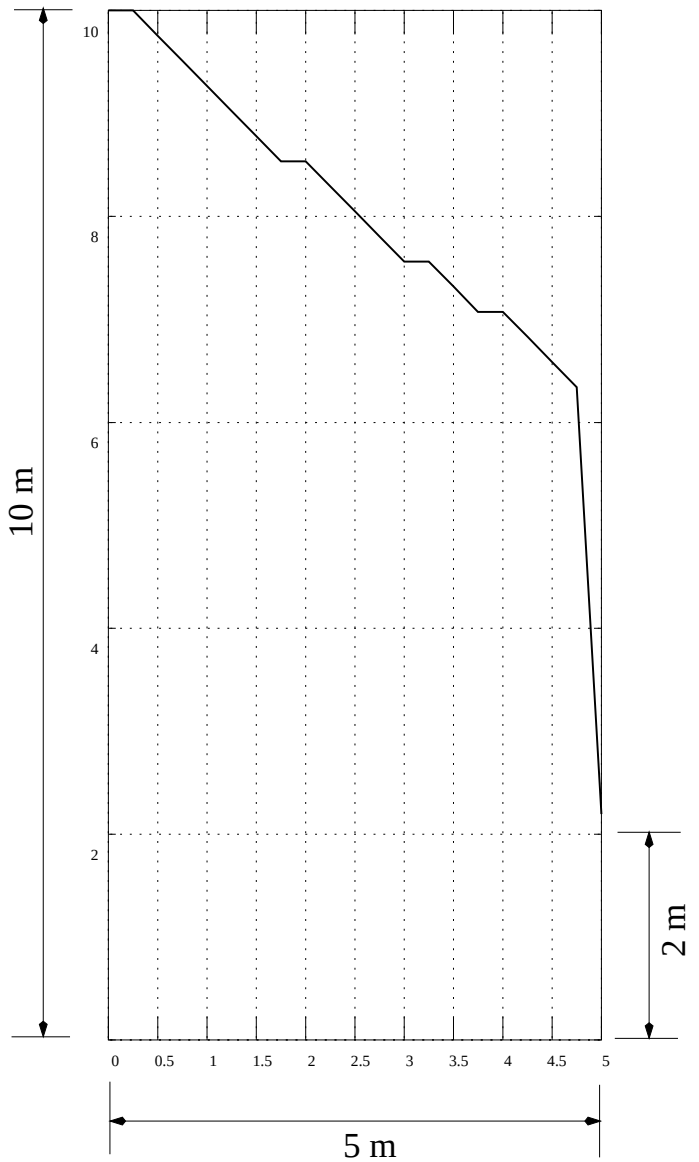

Figura 6: Fronteira livre de infiltração, com $h_x = h_y = 0.25$, por penalização.

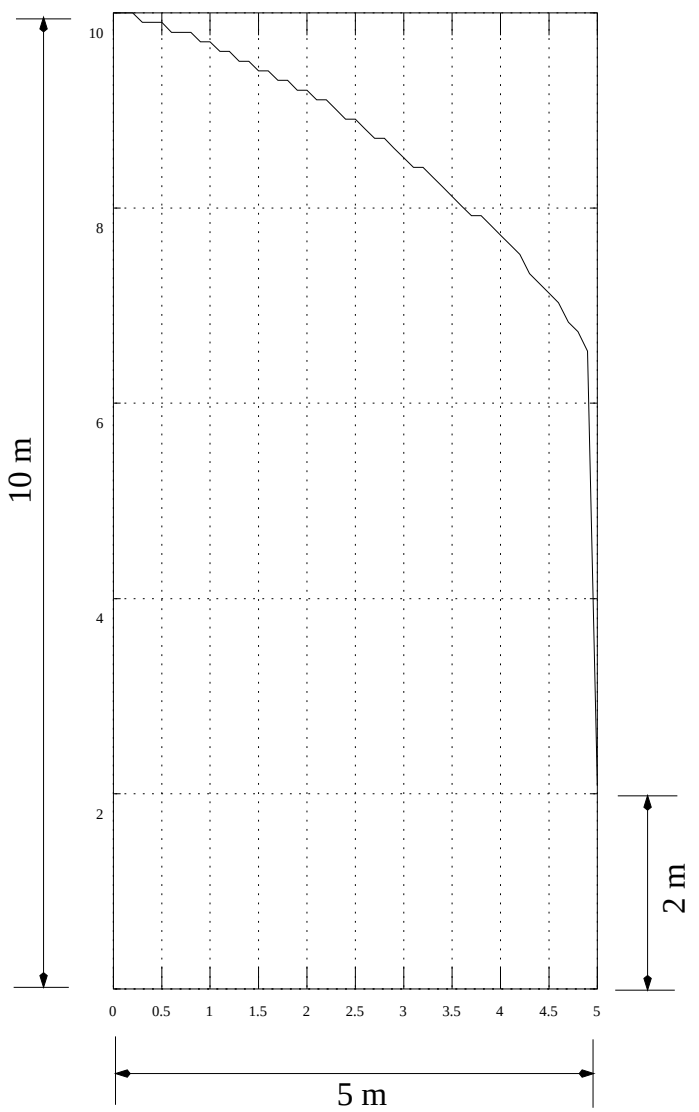

Figura 7: Fronteira livre de infiltração, com $h_x = h_y = 0.1$, por penalização.

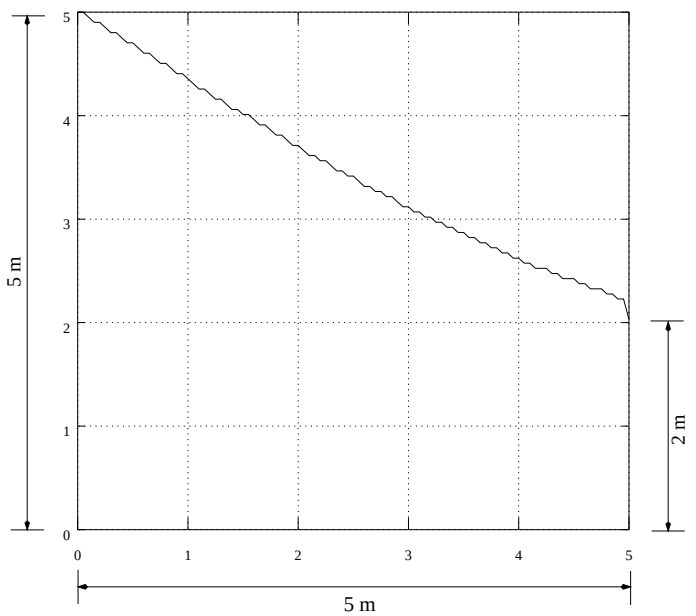

Figura 8: Fronteira livre de infiltração, com $h_x = h_y = 0.05$, por penalização.

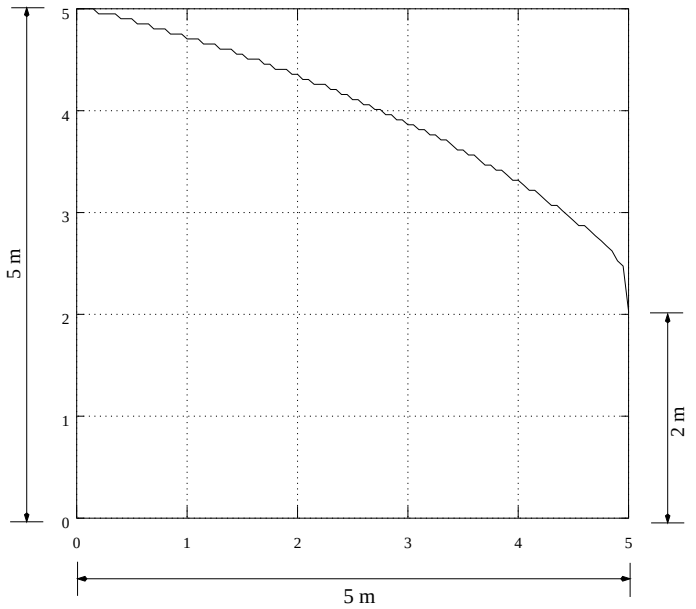

Figura 9: Fronteira livre de infiltração, com $h_x = h_y = 0.05$, por SSORP.

Referências

[1] C. Baiocchi e A. Capelo, "Variational and Quasivariational Inequalities - Applications to Free Boundary Problems", John Wiley and Sons, 1984.

[2] A. Friedman, "Variational Principles and Free-Boundary Problems",Malabar, Fla.: R. E. Krieger, 1988.

[3] D. Kinderlehrer e G. Stampacchia, "An Introduction to Variational Inequalities and their Applications", Academic Press, 1980.

[4] M. Kočvara e J. Zowe, "An iterative two-step algorithm for linear complementarity problems", *Numerische Mathematik*, **68**, 95-106, 1994.

[5] J. L. Lions e G. Stampacchia,"Variational Inequalities", *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **XX**(3), 1967.

[6] N. Kikuchi e J. T. Oden, "Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods", *SIAM Studies in Applied Mathematics*, SIAM, 1988.

[7] J. T. Oden e N. Kikuchi, "Theory of variational inequalities with applications to problems of flow through porous media", *Int. J. Engng. Sci.*, **18**(10), 1173-1284, 1980.

[8] E. Rofman,"Desigualdades Variacionales - Existencia y Aproximación de Soluciones" in *Cuadernos del Instituto de Matemática "Beppo Levi"*, no. **6**, Universidad Nacional de Rosário, 1977.