# MI-822 — Processos Estacionários e Teoria Ergódica

## Lista 2 – entrega 05/06/2014

**1.** Sejam $X, Y$ v.a. discretas com distribuições

$$p_X(0) = p_X(1) = \frac{1}{2}, \qquad p_Y(0) = p_Y(1) = p_Y(2) = \frac{1}{3}.$$

(a) calcule a distância em variação total entre as leis dessas v.a.;

(b) construa dois acoplamentos diferentes de $X$ e $Y$;

(c) construa um acoplamento $(\hat{X}, \hat{Y})$ tal que $\hat{X} \le \hat{Y}$ q.c.;

(d) construa o acoplamento máximo de $X$ e $Y$.

**2.** Repita o exercício anterior para v.a. contínuas com leis Exp(1) e Exp(2).

**3.** Considere v.a. $X_1, X_2, X_3$, onde $X_1 \sim U[0,1]$, $X_2 \sim Exp(1)$, $X_3 \sim |N(0,1)|$ (i.e., é valor absoluto da Normal). Para quais pares ordenadas $(i, j)$ existe uma constante positiva $c_{ij}$ tal que $c_{ij} X_i$ domina $X_j$?

**4.** Apresente um exemplo da sequência de v.a. $(X_n, n \ge 1)$ tal que $X_n \stackrel{q.c.}{\to} X_\infty \sim U[0,1]$, mas a distância em variação total entre $X_i$ e $X_j$ é 2, para todos $i, j \in [1, \infty]$, $i \ne j$.

**5.** A matriz de transição de uma cadeia de Markov com espaço de estados $\{0, 1\}$ é dada por:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Apresente uma estimativa não trivial para a distância em variação total entre $\pi$ (a medida estacionária da cadeia) e $\pi_n^0$ (a lei da cadeia no tempo $n$ dado que $X_0 = 0$).