MI401 — lista de exercícios (esperança condicional)

1. Sejam P, Q duas medidas de probabilidade num mesmo espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$. Mostre a equivalência dos dois fatos a seguir:

- existem $\alpha \in (0,1]$ e uma medida de probabilidade Q' tais que $P = \alpha Q + (1-\alpha)Q'$;
- Q é absolutamente contínua com relação a P, e existe uma constante $\ell > 0$ tal que
$$\frac{dQ}{dP} \leq \ell \qquad P\text{-q.c.}$$

Mostre ainda que $\ell\alpha \leq 1$.

2. A densidade conjunta das v.a. X, Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{216}, & \text{se } 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 6, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule $\mathrm{E}(X \mid Y)$ e $\mathrm{E}(Y^2 \mid X)$.

3. Mostre que, se $\eta = \mathrm{E}(\xi \mid \mathcal{F})$ e $\mathrm{E}\xi^2 = \mathrm{E}\eta^2$, então $\xi = \eta$ q.c.

4. Suponha que $\xi = \eta$ para quasi todos $\omega \in B$, onde $B \in \mathcal{A}$. Prove que então $\mathrm{E}(\xi \mid \mathcal{A}) = \mathrm{E}(\eta \mid \mathcal{A})$ para quasi todos $\omega \in B$.

5. Considere o seguinte

Teorema. Suponha que ξ, η são v.a. independentes, $\mathrm{E}|\xi| < \infty, \mathrm{E}|\eta| < \infty$. Então para qualquer σ-algebra $\mathcal{A}$, temos $\mathrm{E}(\xi\eta \mid \mathcal{A}) = \mathrm{E}(\xi \mid \mathcal{A})\mathrm{E}(\eta \mid \mathcal{A})$.

Se você acha que o Teorema é verdadeiro, prove-o, caso contrário, dê um contra-exemplo.