## Séries de Taylor

**Teorema 1** *Se a função $f$ é definida numa vizinhança $|x - x_0| < \varepsilon$ do ponto $x_0$ e tem nesta vizinhança do $x_0$ derivadas $f'(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$, e tem derivada $f^{(n)}(x_0)$, então*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \to x \to x_0$$

**Teorema 2** *Se a função $f$ é definida no intervalo $[a, b]$ e tem neste intervalo derivadas contínuas $f'(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$, e para $x \in (1, b)$ tem derivada finita $f^n(x)$, então*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + R_n(x),$$

*onde o termo residual $R_n(x)$ pode ser representado na forma*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x - a))}{n!}(x - a)^n, \quad 0 < \theta < 1$$

*ou*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta_1(x - a))}{(n - 1)!}(1 - \theta_1)^{n-1}(x - a)^n, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

**1.** Escrever a fórmula de Taylor para $f(x) = 1+3x+5x^2-2x^3$ no ponto $x_0 = -1$.

**2.** Escrever a fórmula de Taylor até o termo indicado para as seguintes funções:
(a) $f(x) = (a^m + x)^{1/m}$ até $x^4$ (aqui $a > 0$);
(b) $f(x) = e^{2x-x^2}$ até $x^5$;
(c) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$ até $x^3$.

**3.** Suponha que $f(x) = 1 + kx + o(x)$, quando $x \to 0$. Prove que

$$\lim_{x \to 0}(f(x))^{1/x} = e^k.$$

**4.** Estime o erro das seguintes aproximações:
(a) $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$, quando $0 \le x \le 1$;
(b) $\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{6}$, quando $|x| \le 0.5$;
(c) $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, quando $0 \le x \le 1$.

**5.** Para quais $x$ a expressão $1 - \frac{x^2}{2}$ aproxima $\cos x$ com precisão 0.0001?