## Notação "O" e "o"

**Definição 1** *Sejam $f$ e $g$ duas funções. Dizemos que $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$, (onde $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$) se existe uma constante $A$ tal que $|f(x)| \le A|g(x)|$ se $x$ está numa vizinhança de $a$, ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (ou existe $M$, tal que para todo $x > M$, no caso de $a = +\infty$) temos $|f(x)| \le A|g(x)|$.*

**Definição 2** *Dizemos que $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$, (onde $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$) se*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

**1.** Mostre que:
(a) $o(o(f)) = o(f)$;
(b) $O(o(f)) = o(f)$;
(c) $o(O(f)) = o(f)$;
(d) $O(O(f)) = O(f)$;
(e) $O(f) + o(f) = O(f)$;
(g) $o(f) + o(f) = o(f)$;
(h) $O(f) + O(f) = O(f)$;
(i) $o(f)g = o(fg)$;
(j) $o(f)O(g) = o(fg)$;
(k) $o(f)o(g) = o(fg)$.

**2.** Suponha $x \to 0$ e $n > 0$. Mostre que:
(a) $CO(x^n) = O(x^n)$, onde $C \neq 0$ é uma constante;
(b) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$, se $n \le m$;
(c) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$;
(d) $O(x^n) = o(x^m)$, $n > m$.

**3.** Suponha $x \to \infty$ e $n > 0$. Mostre que:
(a) $CO(x^n) = O(x^n)$, onde $C \neq 0$ é uma constante;
(b) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$, se $n \ge m$;
(c) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.

**4.** Suponha $x \to 0$. Mostre que:
(a) $2x - x^2 = O(x)$;
(b) $x \operatorname{sen} \sqrt{x} = O(x^{3/2})$;
(c) $x \operatorname{sen}(1/x) = O(|x|)$;
(d) $\ln x = o(x^{-\varepsilon})$ para todo $\varepsilon > 0$;
(e) $(1 + x)^n = 1 + nx + o(x)$.