

ME-501 Processos estocásticos

Gabarito - Prova 1B

1. Quais são as classes de seguintes cadeias de Markov:

a)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix};$$

b)

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Para cada classe, determine se ela é recorrente ou transiente. Justifique a resposta.

Resposta:

a) Classe única: $\{0, 1, 2\}$ - recorrente

b) Duas classes: $\{0, 1, 3\}$ - recorrente e $\{2\}$ - transiente.

2. Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov. Mostre que se para algum r todos os elementos da matriz P^r são positivos, então para qualquer $n \geq r$ todos os elementos da P^n também são positivos.

Resposta:

Como $n \geq r$, então existe m tal que $n = r + m$. Daí, pelas equações de Chapman-Kolmogorov, para quaisquer i, j

$$P_{ij}^n = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^m P_{kj}^r.$$

Mas, como a linha de uma matriz de transição deve somar 1, $\exists w$ t.q. $P_{iw}^m > 0$. Portanto,

$$P_{ij}^n = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^m P_{kj}^r \geq P_{iw}^m P_{wj}^r > 0.$$

Então para quaisquer i, j temos $P_{ij}^n > 0$.

3. Considere o processo de ramificação (de Galton-Watson), começando de uma partícula, com os seguintes parâmetros:

- (a) $p_0 = 1/4, p_1 = 1/4, p_2 = 1/2$;
 (b) $p_0 = 1/5, p_1 = 2/5, p_3 = 2/5$;
 (c) $p_0 = 9/13, p_2 = 3/13, p_7 = 1/13$.

Em cada caso, calcule a probabilidade da extinção do processo. No caso (a), calcule ainda a probabilidade da extinção supondo que na geração inicial há duas partículas.

Resposta:

(a) $\mu = \sum_{j=0}^{\infty} jP_j = \frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} = \frac{5}{4}$.

Logo, como $\mu > 1$, temos que π_0 é o menor número positivo que satisfaz $\pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0^j P_j$.

Nesse caso, temos que

$$\pi_0 = \frac{1}{4} + \pi_0 \frac{1}{4} + \pi_0^2 \frac{1}{2}$$

, que tem como solução $\pi_0 = 1$ ou $\pi_0 = 0.5$. Portanto, $\pi_0 = \frac{1}{2}$.

Se tivéssemos duas partículas na geração inicial a probabilidade de extinção seria de $\pi_0^2 = \frac{1}{4}$, uma vez que π_0 é a probabilidade de extinção para uma partícula e probabilidade de extinção seria a probabilidade das duas partículas se extinguiem juntas.

(b) $\mu = \sum_{j=0}^{\infty} jP_j = \frac{2}{5} + 3\frac{2}{5} = \frac{8}{5}$.

Logo,

$$\pi_0 = \frac{1}{5} + \pi_0 \frac{2}{5} + \pi_0^3 \frac{2}{5} \Leftrightarrow (\pi_0 - 1)(\pi_0^2 + 6\pi_0 - 1) = 0,$$

que tem como soluções $\pi_0 = 1, \pi_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \pi_0 = \frac{-\sqrt{3}-1}{2}$. Portanto, a probabilidade de extinção é $\pi_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

(c) $\mu = \sum_{j=0}^{\infty} jP_j = 2\frac{3}{13} + 7\frac{1}{13} = 1$. Portanto, $\pi_0 = 1$.

4. Considere o bispo do xadrez fazendo passeio aleatório pelo tabuleiro: em cada passo, ele escolhe ao acaso um dos lances legais disponíveis. Seja Y_n a posição dele no momento n . Calcule, aproximadamente, as seguintes probabilidades:

- (a) $\mathbb{P}_{c8}[Y_{8314} = f4]$;
 (b) $\mathbb{P}_{e7}[Y_{9837} = a3]$.

Resposta:

- (a) Se o bispo começou em $c8$, ele sempre estará em uma posição de cor branca. Mas, $f4$ é preta. Portanto,

$$\mathbb{P}_{c8}[Y_{8314} = f4] = 0.$$

- (b) Essa probabilidade é aproximadamente π_{a3}

Seja S_p o conjunto de posições de cor pretas do tabuleiro. Para encontrar π_{a3} , vamos usar que $\pi_x = \frac{mov(x)}{\sum_{x \in S_p} mov(x)}$, onde $mov(x)$ é o número de lances possíveis saindo de x . Nesse caso, $\sum_{x \in S_p} mov(x) = 280$ e $mov(a3) = 7$. Portanto,

$$\mathbb{P}_{e7}[X_{9837} = a3] \approx \frac{7}{280}.$$

5. Considere uma cadeia de Markov reversível com o espaço de estados \mathcal{X} , a matriz de transição P e a medida reversível π . Prove que P é um operador linear auto-adjunto no espaço de funções de \mathcal{X} para \mathbb{R} , equipado com o produto escalar $\langle f, g \rangle = \sum_{i \in \mathcal{X}} f(i)g(i)\pi_i$.

Resposta:

Para que T seja um operador linear auto-adjunto, devemos ter que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad \forall x, y.$$

Primeiramente, P é um operador linear, por $P(x + y) = Px + Py$ e $P(ax) = aPx$. Logo, basta provar que $\langle Pf, g \rangle = \langle f, Pg \rangle$.

Note que Pf é um vetor onde cada entrada i é dada por $\sum_{j \in \mathcal{X}} f(j)P_{ij}$. E Pg é um vetor onde cada entrada i é dada por $\sum_{j \in \mathcal{X}} g(j)P_{ij}$. Além disso, a cadeia de Markov é reversível, então $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$. Sendo assim, temos:

$$\langle Pf, g \rangle = \sum_{i \in \mathcal{X}} \sum_{j \in \mathcal{X}} g(i)f(j)P_{ij}\pi_i = \sum_{i \in \mathcal{X}} \sum_{j \in \mathcal{X}} g(i)f(j)P_{ji}\pi_j = \sum_{j \in \mathcal{X}} \sum_{i \in \mathcal{X}} g(i)f(j)P_{ji}\pi_j = \langle f, Pg \rangle.$$

Portanto, P é um operador linear auto adjunto.