ME-100 Fundamentos de cálculo

Lista 9

Continuidade

1. Escreva a negação de "f é contínua no ponto x_0".

2. Construa exemplos de funções contínuas em um domínio D tais que:
(a) f é limitada superiormente, mas não atinge o seu valor máximo;
(b) f não é limitada;
(c) f é limitada, atinge um valor máximo, mas não um vlor mínimo.

3. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ -x, & x < 1 \end{cases}$$

e seja $a = 1$. Nos casos em que seja possível, exiba uma seqüência $\{x_k\}$ tal que:
(a) $\lim x_k = a$ e $\lim f(x_k)$ não existe;
(b) $\lim x_k = a$ e $\lim f(x_k) = f(a)$;
(c) $\lim x_k = a$ e $\lim f(x_k) \neq f(a)$;
Nos casos em que você acha que não é possível, justifique!

4. Idem ao exercício 3 com $a = 2$.

5. Construa uma função f e uma seqüência $\{a_k\}$ tais que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, f não é contínua no 0, $\lim a_k = 0$, $\lim f(a_k) = f(0)$ (todas as condições devem valer).

6. Construa uma função f e duas seqüências $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$ tais que f é discontínua em $a = 5$, $\lim x_k = \lim y_k = a$, $\lim f(x_k) = f(a)$, $\lim f(y_k) \neq f(a)$.

7. Sejam f e g duas funções $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontínuas no ponto a. Prove ou dê um conta-exemplo para as seguintes afirmações:
(a) $f + g$ é discontínua no ponto a;
(b) $f \cdot g$ é discontínua no ponto a.

8. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

A função f é contínua em 0? Exiba uma seqüência $\{a_k\}$ que converge a 0, mas $\lim f(a_k) \neq 1$.

9. Seja f contínua am $[a, b]$ e $f(x) = 0$, se $x \in \mathbb{Q}$. Prove que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

10. Para cada $x \in [0, 1]$ definimos

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Prove que:

(a) f é contínua somente no ponto $x = 1/2$ e

(b) f assume todos os valores compreendidos entre 0 e 1.

11. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Prove que f é contínua no ponto 0.

12. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \ \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Prove que f é contínua no ponto 0.

13. Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Prove que f é contínua no ponto 0.

14. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções tais que f é contínua em x_0 e g é contínua em $f(x_0)$. Para todo x definimos $h(x) = g(f(x))$. Prove que h é contínua em x_0.

15. Defina rigorosamente o conceito "$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$" usando seqüências.