ME-100 Fundamentos de cálculo

Lista 8

Seqüências

1. Mostre que toda seqüência convergente é limitada.

2. Seja $\{x_k\}$ uma seqüência tal que $\lim x_k = L > 0$. Prove que:
(a) Existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_k > 0$ para todo $k \geq M$.
(b) Para todo $A < L$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_k > A$ para todo $k \geq M$.

3. Sejam $\lim a_n = A$ e $\lim b_n = B$. Prove que:
(a) $\lim |a_n| = |A|$
(b) $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$
(c) $\lim(a_n b_n) = AB$
(d) se $B \neq 0$, então $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

4. Usando exercício anterior, prove que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^7 - 2n^6 + 5n^3 - 2n^2 + n - 1}{5n^7 - 8n^4 - 3n^2 - 9n + 1} = \frac{3}{5}.$$

5. Escreva detalhadamente a negação de "$\lim a_n = L$" e prove que a seqüência $\{a_n\}$ dada por $a_n = (-1)^n$ não converge a nenhum número real.

6. Construa um exemplo de uma seqüência $\{a_n\}$ e um conjunto A tal que $a_n \in A$ para todo $n \geq 1$, mas $\lim a_n \notin A$.

7. Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas seqüênciasreais tais que $\lim a_n = L$ e $\lim(a_n - b_n) = 0$. Prove que $\lim b_n = L$.

8. Suponha que $\lim a_n = a$ e que $a_n > b$ para todo n. Prove que $a \geq b$.

9. Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ duas seqüências reais tais que $\{x_n\}$ é limitada e $\lim y_n = 0$. Prove que $\lim(x_n y_n) = 0$.

10. Seja $\{x_n\}$ uma seqüência que converge a L. Definimos uma nova seqüência $y_n = x_{n+9}$. Prove que $\lim y_n = L$.

11. Seja $\{x_n\}$ uma seqüência e definimos uma nova seqüência $y_n = (x_n + x_{n+1})/2$. Prove que se $\{x_n\}$ é convergente, então $\{y_n\}$ também é e tem o mesmo limite. É possível que $\{y_n\}$ seja convergente, mas $\{x_n\}$ não? Demonstre ou dê um contra-exemplo.

12. Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ duas seqüências tais que $x_n < y_n$ para todo n. Prove que, se ambas são convergentes, então $\lim x_n \leq \lim y_n$. É possível que, na desiguladade acima, se verifique a igualdade? Dê exemplos.

13. Seja $\{x_n\}$ uma seqüência tal que $\lim |x_n - x_{n-2}| = 0$. Prove ou dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação: $\lim |x_n - x_{n-1}| = 0$.

14. Sejam $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ três seqüências tais que $\lim a_n = \lim b_n = \lim c_n = L$. Defina uma nova seqüência $\{a_1, b_2, c_3, a_4, b_5, c_6, a_7, \ldots\}$. Prove que o limite desta seqüência é igual a L.

15. Prove, **usando somente a definição do limite** (sem usar as propiedades), que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,\ \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^3+1} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0,\ \lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1.$$

16. Defina rigorosamente o que significa $\lim a_n = +\infty$ e $\lim a_n = -\infty$. Seja $\{a_n\}$ uma seqüência tal que $a_n > 0$ para todo n e $\lim a_n = 0$. Prove que $\lim(1/a_n) = +\infty$.

17. Prove que se $\{x_n\}$ é uma seqüência convergente, então $\lim |x_{n+1} - x_n| = 0$. A recíproca é verdadeira? Analise as seqüências $x_n = \ln n$ e $x_n = \sqrt{n}$.

18. Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ duas seqüências tais que $\lim x_n = +\infty$ e $y_n \geq x_n/2$ para todo n. Prove que $\lim y_n = +\infty$.

19. Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ duas seqüências tais que $\lim x_n = +\infty$ e $y_n = x_n/n$ para todo n. Prove que a afirmação $\lim y_n = -5$ é falsa.

20. Construa duas seqüências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tais que $\lim x_n = \lim y_n = 0$, $y_n \neq 0$ para todo n e
(a) $\lim(x_n/y_n) = 0$;
(b) $\lim(x_n/y_n) = 5$;
(c) $\lim(x_n/y_n) = +\infty$;
(d) $\lim(x_n/y_n) = -\infty$;
(e) $\lim(x_n/y_n) = -2$;
(f) $\lim(x_n/y_n)$ não existe.