ME-100 Fundamentos de cálculo

Lista 7

Funções

1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $f : A \to A$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \neq 6 \\ 1, & x = 6. \end{cases}$$

(a) Calcule $f(3)$, $f(6)$, $f(f(2))$.

(b) Ache uma imagem inversa de 2 e de 1.

2. Para cada uma das seguintes funções prove ou dê um contra-exemplo para as afirmações: (i) f é injetora e (ii) f é sobrejetora.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$

(b) $f : \mathbb{R} \to [-1, +\infty]$, $f(x) = x^2 - 1$

(c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$

(d) $f : (0, 1] \to [1, +\infty)$, $f(x) = 1/x$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - |x|$

(f) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/(1 - x)$

(g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/(1 + x^2)$

(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -1/(2 + |x|)$

(j) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = (3n - 1)(2 - n)$

(k) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,

$$f(n) = \begin{cases} (n - 1)/2, & n \text{ é ímpar} \\ -n/2, & n \text{ é par.} \end{cases}$$

(l) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(m) = (m^2)!$

(m) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ é par} \\ 3n + 1, & n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

(n) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$

(o) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$

(p) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy + x + y$

(q) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (x, x)$

(r) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x$

(s) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + |y|$

(t) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(m, x) = mx$

(u) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x^2 + y^2, x)$

(v) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = (3x - y, x + y)$
(w) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x^2 + y, x - y)$
(x) $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$
(y) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (x, 0)$
(z) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y, x + z)$.

3. Para cada uma das seguintes funções prove ou dê um contra-exemplo para as afirmações: (i) f é injetora e (ii) f é sobrejetora.
(a) $f : (0, 1) \to \mathbb{N}$ definida da seguinte maneira: *se a expansão decimal de x é infinita, então $f(x) = 1$; se a expansão decimal de x é finita, então $f(x)$ é o número de dígitos da expansão decimal de x.* Por exemplo, $f(0.475) = 3$, $f(\pi) = 1$.
(b) $f : A \to \mathcal{P}(A)$, $f(x) = \{x\}$.
(c) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N} \cup \infty$, $f(X) =$ soma de elementos de X.
(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

4. Considere os pares de funções selecionadas de exercício 2: (a) e (b), (d) e (e), (h) e (o), (m) e (s), (p) e (q), (r) e (w). Para cada par diga se a função composta está bem definida (lembre-se que para cada par há duas maneiras de fazer a composição). Quando for possível, defina a função composta.

5. Para cada função do exercício 2, pense se é possível definir a função inversa e em caso afirmativo escreva f^{-1}.

6. Seja f uma função bijetora. Prove que a inversa f^{-1} também é bijetora.

7. Sejam A e B conjuntos, e $f : A \to B$. Sejam $X, Y \subset A$ e $Z, W \subset B$. Prove que:
(a) $X \subset Y \Rightarrow \operatorname{Im} f(X) \subset \operatorname{Im} f(Y)$
(b) $\operatorname{Im} f(X \cup Y) = \operatorname{Im} f(X) \cup \operatorname{Im} f(Y)$
(c) f é injetora $\Rightarrow \operatorname{Im} f(X \cap Y) = \operatorname{Im} f(X) \cap \operatorname{Im} f(Y)$
(d) Construa uma função f não-injetora tal que $\operatorname{Im} f(X \cap Y) \neq \operatorname{Im} f(X) \cap \operatorname{Im} f(Y)$
(e) $Z \subset W \Rightarrow \operatorname{Im}^{-1} f(Z) \subset \operatorname{Im}^{-1} f(W)$
(f) $\operatorname{Im}^{-1} f(Z \cup W) = \operatorname{Im}^{-1} f(Z) \cup \operatorname{Im}^{-1} f(W)$
(g) $\operatorname{Im}^{-1} f(Z \cap W) = \operatorname{Im}^{-1} f(Z) \cap \operatorname{Im}^{-1} f(W)$
(h) $X \subset \operatorname{Im}^{-1} f(\operatorname{Im} f(X))$
(i) f é injetora $\Rightarrow X = \operatorname{Im}^{-1} f(\operatorname{Im} f(X))$
(j) Construa um exemplo onde $X \neq \operatorname{Im}^{-1} f(\operatorname{Im} f(X))$
(k) $\operatorname{Im} f(\operatorname{Im}^{-1} f(Z)) \subset Z$
(l) f é sobrejetora $\Rightarrow \operatorname{Im} f(\operatorname{Im}^{-1} f(Z)) = Z$.

8. Seja $f : A \to B$. Construa um exemplo onde $\operatorname{Im} f(\operatorname{Im}^{-1} f(B)) \neq B$.

9. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Prove que para todo $E \subset C$ vale $\operatorname{Im}^{-1}(g \circ f)(E) = \operatorname{Im}^{-1} f(\operatorname{Im}^{-1} g(E))$.

10. Seja $f : A \to B$ uma função bijetora. Prove que
(a) $f(f^{-1}(y)) : B \to B, \quad f(f^{-1}(y)) = y$;
(b) $f^{-1}(f(x)) : A \to A, \quad f^{-1}(f(x)) = x$.