

ME-100 Fundamentos de cálculo

Lista 6

Números complexos

1. Represente as seguintes expressões na forma $a + bi$: $(2 + 3i)(1 - 4i)$, i^{-1} , $\frac{1-2i}{1+3i}$, $\overline{(1-i)(1+2i)}$, $\overline{(-2+i)^{-1}}$.
2. Resolva as equações $z^3 = 1$, $z^2 = i$, $z^4 = -1$, $z^2 = -2 + 5i$.
3. Prove que $|z^2| = |z|^2$, $\overline{z^2} = \overline{z}^2$, $\overline{(zu)} = \overline{z} \cdot \overline{u}$ para quaisquer $z, u \in \mathbb{C}$. Prove que $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$ para qualquer $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
4. Escreva z na forma $r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ para $z = i$, $z = -1$, $z = -i$, $z = -2 + 3i$, $z = 1 + i$.
5. Escreva z na forma $a + bi$ para $z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4})$, $z = 4(\cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6})$, $z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}$.
6. Desenhe no plano complexo as regiões correspondentes a
 - (a) $\{z : \operatorname{Im}(z^2) > 0\}$;
 - (b) $\{z : |z - 1 - i| \leq 3\}$;
 - (c) $\{z : 0 \leq \operatorname{Re}(iz + 1) \leq 5\}$.
7. Para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$, prove $|z - w|^2 + |z + w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.