ME-100 Fundamentos de cálculo

Lista 5

Números reais

O conjunto de números reais é munido das operações **soma** (+) e **produto** (·) e da relação de **ordem** (<). As seguintes propriedades são validas:

S1 Associatividade da soma
Para quaisquer números reais a, b e c, $a + (b + c) = (a + b) + c$

S2 Comutatividade da soma
Para quaisquer números reais a e b, $a + b = b + a$

S3 Elemento neutro da soma
Existe um número real 0 (zero) tal que para todo número real a, $0 + a = a$

S4 Inverso aditivo
Para todo número real a existe um número real $-a$ tal que $a + (-a) = 0$

P1 Associatividade do produto
Para quaisquer números reais a, b e c, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

P2 Comutatividade do produto
Para quaisquer números reais a e b, $a \cdot b = b \cdot a$

P3 Elemento neutro do produto
Existe um número real 1 (um), $1 \neq 0$, tal que para todo número real a, $1 \cdot a = a$

P4 Inverso multiplicativo
Para todo número real $a \neq 0$ existe um número real a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = 1$

D1 Distributividade
Para quaisquer números reais a, b e c, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

O1 Tricotomia
Para quaisquer números reais a, b e c, apenas uma das seguintes relações é válida: $a < b$ ou $a = b$ ou $b < a$

O2 Transitividade
Para quaisquer números reais a, b e c, se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$

O3 Consistência com respeito a soma
Para quaisquer números reais a, b e c, se $a < b$, então $a + c < b + c$

O4 Consistência com respeito a produto
Para quaisquer números reais a, b e c, se $0 < c$ e $a < b$, então $c \cdot a < c \cdot b$

Utilizaremos também a seguinte notação:

N1 Subtração
Para quaisquer números reais a e b, $a - b = a + (-b)$

N2 Divisão
Para quaisquer números reais a e $b \neq 0$, $a/b = \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$

Exercícios

1. Sejam a, b e c números reais. A partir das propriedades acima demonstrar as seguintes proposições (a cada passo, indique a propriedade utilizada):
(a) Se $a + b = c + b$, então $a = c$.
(b) Se $a + a = a$, então $a = 0$.
(c) $a = -(-a)$.
(d) $0 = -0$.
(e) $a \cdot 0 = 0$. (Sugestão: $0 + 0 = 0$ e **D1**).
(f) Se $a \neq 0$, então $-a \neq 0$.
(g) $-(a + b) = (-a) + (-b)$.
(h) $a + b = a - (-b)$.
(i) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$.
(j) $(-1) \cdot a = -a$.
(k) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.
(l) $(-a) \cdot (-b) \cdot (-c) = -(a \cdot b \cdot c)$.
(m) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.
(n) Se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.
(o) Se $a \cdot a = 1$, então $a = 1$ ou $a = -1$.
(p) Se $a \neq 0$ e $a \cdot b = a \cdot c$, então $b = c$.
(q) $1 = 1^{-1}$ e $-1 = (-1)^{-1}$.
(r) Se $a \neq 0$, então $a^{-1} \neq 0$ e $(-a)^{-1} = -a^{-1}$.
(s) Se $a \neq 0$, então $a = (a^{-1})^{-1}$.
(t) Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

2. Sejam a, c, $b \neq 0$ e $d \neq 0$ números reais. Prove que:
(a) $0/b = 0$.
(b) $a/b = c/d$ se e somente se $a \cdot d = b \cdot c$.
(c) $a/(b/d) = (a \cdot d)/b$.
(d) $(b/d)^{-1} = d/b$.
(e) $-(a/b) = (-a)/b = a/(-b)$ e $(-a)/(-b) = a/b$.
(f) $(a/b) \cdot (c/d) = (a \cdot c)/(b \cdot d)$.
(g) Se $a/b = c/d$, então $(a+b)/b = (c+d)/d$, $(a-b)/b = (c-d)/d$, $(a+b)/(a-b) = (c+d)/(c-d)$ (se $a - b \neq 0 \neq c - d$).
(h) $(a/b) \pm (c/d) = (a \cdot d \pm b \cdot c)/(b \cdot d)$.

3. Sejam a, b, c e d números reais. Prove as seguintes proposições.

(a) $0 < a$ se e somente se $-a < 0$.

(b) $0 < 1$.

(c) Se $a < b$ e $c < d$, então $a + b < c + d$.

(d) Se $a < b$, então $a - c < b - c$.

(e) Se $a + a = 0$, então $a = 0$.

(f) Se $a + a + a = 0$, então $a = 0$.

(g) $0 < a$ se e somente se $0 < a^{-1}$.

(h) Se $0 < a$ e $0 < b$, então $a < b$ se e somente se $b^{-1} < a^{-1}$.

(i) Se $a \neq 0$, então $0 < a \cdot a$.

(j) $a \cdot a + b \cdot b = 0$ se e somente se $a = b = 0$.