ME-100 Fundamentos de cálculo

Lista 4

Demonstrações com inteiros

1. Sejam p, q e r números naturais. Prove que:
(a) se p e q são divisíveis por r, então $p - q$ é divisível por r;
(b) se p é divisível por r, então pq é divisível por r;
(c) se p é divisível por r, então p^q é divisível por r.

2. Sejam p, q e r números naturais. Prove que:
(a) $10p + q$ é divisível por 3 se e somente se $p + q$ é divisível por 3;
(b) $100r + 10p + q$ é divisível por 3 se e somente se $r + p + q$ é divisível por 3.
(c) Baseando-se nos itens (a) e (b) deduza e prove o critério de divisibilidade por 3.

3. Repita o exercício anterior para divisibilidade por 9.

4. Baseando-se nos exercícios 2 e 3, prove o critérios de divisibilidade por 4, 6 e 8.

5. Definimos o fatorial $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Quais das afrimações abaixo são verdadeiras (justifique a resposta)?
(a) $n!$ é divisível por todos os números pares menores que n.
(b) $n!$ é par.
(c) Para todo $n \geq 100$, $n!$ é divisível por 3.
(d) Para todo $n \geq 30$ existe um número primo p tal que $n!$ é divisível por p.
(e) $(n!)^2$ é divisível por $n!$.

6. Prove que $100!$ é divisível por 10^{11}.

7. Prove, usando o algoritmo da divisão, que todo número racional tem uma expressão decimal finita ou periódica. Prove que o número cuja expressão decimal é dada por $0.101001000100001000001\ldots$ não é um número racional.

8. Prove ou dê contra-exemplos para as seguintes afirmações.
(a) Se $x \in \mathbb{Z}$ e $4x$ é par, então x é par.
(b) Se $x \in \mathbb{Z}$ é par, então $4x$ é par.
(c) Se $x \in \mathbb{Z}$ e x^2 é par, então x é par.
(d) Se $x \in \mathbb{Z}$ e $3x$ é par, então x é par.
(e) $x \in \mathbb{Z}$ é par se e somente se x^2 é par.
(f) Se $x, y, z \in \mathbb{Z}$ e $x + y + z$ é ímpar, então um número ímpar de inteiros entre $\{x, y, z\}$ é ímpar.

9. Seja $\{a_1, \ldots, a_n\}$ um conjunto de números naturais. Prove que existe um subconjunto de $\{a_1, \ldots, a_n\}$ tal que a soma de seus elementos é divisível por n. *Sugestão:* convença-se, primeiro, de que esta proposição é verdadeira, escrevendo vários exemplos. Pense no conjunto $\{a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$.

10. Uma importante fórmula da geometria, devida a Euler, diz que se P é um poliedro no espaço tridimensional, V é o número de seus vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces, então $V + F - A = 2$. Suponha agora que P tem seguintes caractéristicas: (i) em cada vértice concorrem exatamente 3 faces, (ii) cada face de P é um polígono com 5 ou 6 lados. (Pense em uma bola de futebol ou em um dodecaedro). Prove que o número de faces com 5 lados é igual a 12.

11. Prove, por indução em n, as seguintes proposições.
(a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $1^1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.
(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.
(c) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $1^1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \leq n^3$.
(d) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-n} \leq 2$.
(e) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$.
(f) Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

(g) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3$.
(f) O número de subconjuntos de um conjunto de n elementos é 2^n.

12. Prove, por indução, que o número de maneiras diferentes de ordenar um conjunto de n elementos é igual a $n!$. *Exemplo*: o conjunto $\{a, b, c\}$ de 3 elementos pode ser ordenado das seguintes maneiras: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*.

13. Suponha que n times participam num campeonato, onde todos jogam contra todos uma única vez. Prove, por indução, que o número total de jogos é $n(n-1)/2$.

14. Numa festa há n homens e n mulheres. Prove, por indução, que o número de casais (homem+mulher) que podem ser formados é n^2.

15. Prove, por indução, que para todo $n \geq 2$, $n^3 - n$ é divisível por 6.

16. Prove, por indução, a seguinte proposição: "Dado um segmento de comprimento unitário, para todo $n \in \mathbb{N}$ pode-se construir com apenas régua e compasso um segmento de comprimento $\sqrt{n}$". (Pitágoras).