ME-100 Fundamentos de cálculo

Lista 3

Operações com conjuntos

1. Sejam A, B e C conjuntos. Prove as seguintes proposições.
(a) $A \subset A \cup B$
(b) $A \cap B \subset A$
(c) $A \setminus B \subset A$
(d) $A \cap B \subset A \cup B$
(e) $B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$
(f) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$
(g) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$
(h) $A \cup (B \cap A) = A$
(i) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$
(j) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$
(k) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
(l) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(m) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(n) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
(o) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

2. Sejam A, B, C e D conjuntos. Para cada uma das seguintes proposições, enuncie em português a hipótese e a tese. Prove as proposições.
(a) $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow A \subset C$
(b) $A \subset C \setminus B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$
(c) $A \cup B = C$ e $A \cap B = \emptyset \Rightarrow B = C \setminus A$
(d) $A \subset C$ e $B \subset D \Rightarrow A \cup B \subset C \cup D$
(e) $A \cap C = A \cap B$ e $A \cup C = A \cup B \Rightarrow B = C$
(f) $A \subset B \Rightarrow A \cap (C \setminus B) = \emptyset$
(g) $A \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cap (B \cup C) = A \cap B$
(h) $A \subset B \Rightarrow A = B \setminus (B \setminus A)$
(i) $A \cup B \subset A \cap B \Rightarrow A = B$
(j) $A \subset \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$
(k) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
(l) $A \subset C$ e $B \subset C \Leftrightarrow A \cup B \subset C$
(m) $A \setminus B \subset B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$
(n) $A \cup B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \neq \emptyset$ ou $B \neq \emptyset$.

3. Sejam A, B e C conjuntos. Prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações.
(a) Se $B \subset C$, então $A \cap B \subset A \cap C$.
(b) Se $A \cap B \subset A \cap C$, então $B \subset C$.

4. Sejam $A_1, A_2, \ldots A_{98}$ conjuntos tais que $A_i \subset A_{i+1}$ para todo $i = 1, \ldots, 97$.
Prove que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{98} = A_{98}$.

5. Explique a seguinte piada:
Ansioso, o pai pergunta ao obstetra: "Doutor, é homem ou mulher?". O médico responde: "Sim".

6. Sejam A, B, C e D conjuntos. Prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações.
(a) $A \subset B$ e $C \subset D \Rightarrow A \times C \subset B \times D$
(b) $A \neq \emptyset$ e $A \times B \subset A \times C \Rightarrow B \subset C$
(c) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
(d) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
(e) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$
(f) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
(g) $(A \times B) \cap ((C \setminus A) \times B) = \emptyset$
(h) $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$
(i) $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$.