Segunda Lista de Exercícios: Grupos

MA 673, Elementos de Álgebra, Segundo semestre de 2017, Turma Z

Ex. 1. Quais dos conjuntos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ **não** são anéis? E corpos? (As operações são as usuais.)

Ex. 2. Mostrar que os conjuntos abaixo são anéis com as operações usuais.

a) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + \sqrt{2}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$;

b) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + \sqrt{2}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$;

c) $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{a + \sqrt{-1}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$;

d) $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}] = \{a + \sqrt{-1}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$;

e) $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + \sqrt{d}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Quais desses são corpos?

Ex. 3. Mostrar que o conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$ é um subcorpo do corpo dos reais. Qual o inverso do elemento $1 - \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}$?

Ex. 4. Seja d um número inteiro que não é quadrado de inteiro. Mostrar que o conjunto das matrizes $\begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix}$, a, $b \in \mathbb{Q}$, é um corpo (as operações são as usuais de matrizes). Este corpo é isomorfo a $\mathbb{Q}[d]$?

Ex. 5. Mostrar que o conjunto das matrizes $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, a, $b \in \mathbb{R}$, é um corpo isomorfo ao corpo $\mathbb{C}$ dos complexos.

Ex. 6. Se A é um anel tal que para todo $a \in A$ vale $a^2 = a$, mostrar que A é comutativo e $2a = 0$ para todo $a \in A$.

Ex. 7. Quais são os ideais e os respectivos anéis quocientes do anel $\mathbb{Z}_n$ dos inteiros módulo n, $n > 1$?

Ex. 8. Sejam $p \in \mathbb{N}$ um primo, $A = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{Z}, (m, n) = 1, (p, n) = 1\}$ e

$$I = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{Z}, (m, n) = 1, (p, n) = 1 \text{ e } p \text{ divide } m\}.$$

Mostrar que A é um subanel de $\mathbb{Q}$. Mostrar que $I \triangleleft A$ e que $A/I \cong \mathbb{Z}_p$.

Ex. 9. Usando o algoritmo de Euclides (divisão sucessiva com resto), encontrar o MDC $d(x)$ dos polinômios f e g. Encontrar polinômios u e v tais que $uf + vg = d$. Considerar os polinômios sobre $\mathbb{Q}$,

a) $f = x^5 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1$, $g = x^3 - 3x + 1$;

b) $f = x^4 - 2x^3 + 2x - 4$, $g = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

Ex. 10. Encontrar a multiplicidade da raiz α do polinômio f sobre os racionais:

a) $f = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $\alpha = 2$;

b) $f = x^{2n+1} - (2n + 1)x^{n+1} + (2n + 1)x^n - 1$, $\alpha = 1$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Ex. 11. Encontrar a, $b \in \mathbb{R}$ para os quais o número 1 é raiz de multiplicidade dois do polinômio $f(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$.

Ex. 12. Encontrar $a \in \mathbb{C}$ se o polinômio $f = x^4 + ax^3 + 27$ tem raiz de multiplicidade maior que um.

Ex. 13. Encontrar a, $b \in \mathbb{C}$ se $f = 3x^5 - 5ax^4 + 5bx - 3$ tem raiz de multiplicidade 3.

Ex. 14. Mostrar que o polinômio $f = 1 + x/1! + x^2/2! + \cdots + x^n/n!$ não tem raízes múltiplas sobre $\mathbb{C}$.

Seja $K = \mathbb{Q}$ o corpo dos racionais. (Pode ser qualquer outro corpo de característica 0.)

Sejam x_1, x_2, $\ldots$, x_n variáveis independentes, denotamos $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ o anel de polinômios nas variáveis x_1, x_2, $\ldots$, x_n com coeficientes em K.

O polinômio $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é *simétrico* se para qualquer permutação $\sigma \in S_n$, temos

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Sabemos f é simétrico se $f = f_\sigma$ para toda transposição $\sigma \in S_n$.

O teorema sobre os polinômios simétricos garante que se f é simétrico então existe um único polinômio g em n variáveis tal que

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

Aqui $e_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, $e_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$, $e_3 = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k$, …, $e_n = x_1 x_2 \cdots x_n$ são os polinômios simétricos *elementares*.

Algoritmo para encontrar o polinômio g.

1. Decompor $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_m$ onde f_i é a componente de f que consiste de todos os monômios de grau total i (componente homogênea de grau i). Encontraremos para cada f_i o respectivo g_i.

2. Suponha f homogêneo (para não abusar de índices). Seja $M = a x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ o maior monômio em f. Isto é, $a \neq 0$ e se $N = b x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}$ é outro monômio em f, com $b \neq 0$, então existe i tal que $a_1 = b_1$, …, $a_{i-1} = b_{i-1}$ e $a_i > b_i$.

Foi demonstrado que para M vale $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n$.

3. Formar a diferença $f^{(1)} = f - a e_1^{k_1-k_2} e_2^{k_2-k_3} \cdots e_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} e_n^{k_n}$. O polinômio $f^{(1)}$ é simétrico e o seu maior monômio é menor que o de f.

4. Repetir para $f^{(1)}$ o mesmo procedimento e assim por diante, o processo termina após uma quantidade finita de passos.

Ex. 15. Escrever em função de e_1, e_2, e_3, a expressão

a) $\sum x_i^4 x_j^2$, $1 \leq i, j \leq 3$, $i \neq j$;

b) $\sum_{i=1}^{3} x_i^3 - 2\sum_{i \neq j} x_i^2 x_j$;

c) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$;

d) $(x_1 + x_2 + 1)(x_1 + x_3 + 1)(x_2 + x_3 + 1)$;

e) $\dfrac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 x_2} + \dfrac{(x_1 - x_3)^2}{x_1 x_3} + \dfrac{(x_2 - x_3)^2}{x_2 x_3}$;

f) $\dfrac{x_1}{x_2 + x_3} + \dfrac{x_2}{x_1 + x_3} + \dfrac{x_3}{x_1 + x_2}$.

Ex. 16. Escrever em função de e_1, e_2, e_3, e_4 a expressão

a) $\sum x_i^3 x_j$, $1 \leq i, j \leq 4$, $i \neq j$;

b) $\dfrac{x_1x_2}{x_3x_4} + \dfrac{x_1x_3}{x_2x_4} + \dfrac{x_1x_4}{x_2x_3} + \dfrac{x_2x_3}{x_1x_4} + \dfrac{x_2x_4}{x_1x_3} + \dfrac{x_3x_4}{x_1x_2}$.

Ex. 17. Escrever em função de e_1, e_2, …, e_n as expressões

a) $\sum x_i^2 x_j^2$, $1 \leq i < j \leq n$, $n \geq 4$;

b) $\sum x_i^2 x_j^2 x_k$, $1 \leq i, j, k \leq n$, $i < j$, $k \neq i$, $k \neq j$, $n \geq 5$;

c) $\sum (x_i - x_j)^2$, $1 \leq i < j \leq n$;

d) $(-x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(x_1 - x_2 + \cdots + x_n) \cdots (x_1 + x_2 + \cdots - x_n)$;

e) $(-x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 + (x_1 - x_2 + \cdots + x_n)^2 + \cdots + (x_1 + x_2 + \cdots - x_n)^2$

Ex. 18. Seja $f(x) \in K[x]$ um polinômio mônico de grau n e com raízes x_1, …, x_n no corpo K. Suponha $a \in K$ tal que $f(a) \neq 0$. Mostrar que

$$f(a) = (a - x_1)(a - x_2) \cdots (a - x_n), \qquad \sum_{i=1}^{n} (a - x_i)^{-1} = \frac{f'(a)}{f(a)};$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a - x_i)^{-2} = \frac{(f'(a))^2 - f(a)f''(a)}{(f(a))^2}.$$

Ex. 19. Seja $f(x) = x^3 + px + q$ com raízes x_1, x_2, x_3. Escrever em funçaõ de p e q as expressões

a) $(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)(x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2)(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)$;

b) $\dfrac{x_1}{(1 + x_2)(1 + x_3)} + \dfrac{x_2}{(1 + x_1)(1 + x_3)} + \dfrac{x_3}{(1 + x_1)(1 + x_2)}$;

c) $\dfrac{x_1^2}{1 + x_1} + \dfrac{x_2^2}{1 + x_2} + \dfrac{x_3^2}{1 + x_3}$;

d) $\dfrac{x_1}{(1 - x_1)^2} + \dfrac{x_2}{(1 - x_2)^2} + \dfrac{x_3}{(1 - x_3)^2}$.