Primeira Lista de Exercícios: Grupos

MA 673, Elementos de Álgebra, Segundo semestre de 2017, Turma Z

Ex. 1. Quais dos seguintes conjuntos são grupos (com a operação indicada):
a) $\{-1, 1\}$ com o produto usual; $\{-1, 0, 1\}$ com o produto usual?
b) $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ onde $0 \neq x \in \mathbb{C}$ é um número dado, com o produto usual?
c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ onde $r \in \mathbb{R}$ é um número real positivo, com a operação produto?
d) As matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$ cujo determinante é igual a 2017?
e) As matrizes simétricas $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$ com a soma? E as simétricas $n \times n$ invertíveis com o produto?
f) Os números racionais positivos com o produto?

Ex. 2. Mostrar que o conjunto $\mathbb{R}^+$ dos reais positivos é um grupo com o produto. Este grupo é isomorfo ao grupo dos reais não nulos com o produto?

Ex. 3. Seja $\mathbb{H}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ o conjunto com 8 elementos e operação binária dada por

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j,$$

onde 1 é o elemento neutro, e -1 troca o sinal no produto.
a) Mostrar que $\mathbb{H}_8$ é um grupo (grupo dos Quatérnios).
b) Se $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, onde $i \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$, mostrar que o conjunto $\{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\} \subset M_2(\mathbb{C})$ é um subgrupo de $GL_2(\mathbb{C})$ e é isomorfo ao $\mathbb{H}_8$.
c) Mostrar que todo subgrupo de $\mathbb{H}_8$ é normal.

Ex. 4. Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e $g \in G$ um elemento fixo. Definimos uma nova operação binária em G: $a * b = agb$, a, $b \in G$. Mostrar que $(G, *)$ é um grupo. Ele é isomorfo ao grupo $(G, \cdot)$?

Ex. 5. Sejam G um grupo e $g \in G$ um elemento de G, $|g| = r$.
a) Mostrar que $g^n = e$ se e somente se $r|n$, e que $g^m = g^n$ se e somente se $m \equiv n \pmod r$.
b) Se $k \in \mathbb{Z}$, a ordem de g^k é $r/(r, k)$. Em particular, $|g^k| = r$ se e somente se $(k, r) = 1$, e $|g^k| = r/k$ se e somente se $k|r$.

Ex. 6. Sejam G um grupo e g, $h \in G$, mostrar que $|g| = h^{-1}gh$. Mostrar também que $|gh| = |hg|$.

Ex. 7. Sejam G um grupo e g, $h \in G$ dois elementos tais que $gh = hg$. Suponhamos $|g| = m$, $|h| = n$.
a) Mostrar que se $(m, n) = 1$ então $|gh| = mn$.
b) Mostrar que o subgrupo abeliano H de G, gerado por g e h, contém elemento de ordem $[m, n]$ (o MMC de m e n).

Ex. 8. Seja G um grupo de ordem par, $|G| = 2m$, mostrar que G contém elemento de ordem 2.

Ex. 9. Se G é um grupo com um único elemento de ordem 2, então este elemento está no centro $Z(G)$ de G (isto é, ele comuta com todos os elementos de G).

Ex. 10. Se G é um grupo tal que todo elemento diferente de e tem ordem 2, mostrar que G é abeliano.

Ex. 11. Encontrar as ordens dos elementos dos seguintes grupos: S_3, $\mathbb{H}_8$, D_4, S_4, A_4.

Ex. 12. Quais são os subgrupos dos grupos: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_{12}$, S_3?

Ex. 13. Seja $G = \mathbb{Z}_n$, encontrar os elementos de ordem d em G e as soluções da equação $x^d = e$ em G, se $n = 12$, $d = 6$, e se $n = 100$, $d = 20$.

Ex. 14. Seja $G = S_n$ e seja $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_k)$ um ciclo de comprimento k em S_n. Mostrar que $|\sigma| = k$. Se $\tau = \sigma_1 \cdots \sigma_m$ é uma permutação em S_n escrita como produto de ciclos independentes, qual a ordem de τ?

Ex. 15. Escrever como produto de ciclos independentes em S_n:
$(352)(415)(241)(25)$ e $(21465)(21)(352)(216)$.

Ex. 16. Sejam σ, $\rho \in S_n$. Mostrar que:
a) Se $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_k)$ é ciclo de comprimento k então $\rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(i_1)\rho(i_2)\dots\rho(i_k))$ de novo é ciclo de comprimento k.
b) Se $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_m$ então $\rho\sigma\rho^{-1} = \rho\sigma_1\rho^{-1} \cdots \rho\sigma_m\rho^{-1}$.
c) Mostrar a partir de (a) e (b) que A_n é um subgrupo normal de S_n.
d) Mostrar que o conjunto $K_4 = \{Id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \triangleleft S_4$ e que $K_4 \leq A_4$.

Ex. 17. Seja G um grupo finito e sejam $g \in G$ e $H \leq G$, mostrar que $|H|$ e $|G : H|$ dividem $|G|$ e $|H||G : H| = |G|$. Mostrar que $|g|$ divide $|G|$ e que $g^{|G|} = e$.

Ex. 18. Seja G um grupo finito e sejam K e H subgrupos de G tais que $K \leq H \leq G$, mostrar que $|G : K| = |G : H||H : K|$. Em particular, $|G : H|$ divide $|G : K|$.

Ex. 19. a) Se $|G| = p$ é um número primo, mostrar que $G \cong \mathbb{Z}_p$. G pode ter subgrupos não triviais?

b) Mostrar que se P é um grupo que não tem subgrupos não triviais então $P = \{e\}$ ou $P \cong \mathbb{Z}_p$ para algum número primo p.

Ex. 20. Mostrar que se $|G|$ é um número ímpar então para todo $g \in G$ existe um único $h \in G$ com $h^2 = g$.

Ex. 21. O grupo S_4 tem subgrupos de ordem 6? E o grupo A_4 tem subgrupos de ordem 6?

Ex. 22. Mostrar que se $H \leq G$ e $|G : H| = 2$ então $H \triangleleft G$.

Ex. 23. Seja G um grupo, denotamos $Z(G) = \{a \in G \mid ag = ga \text{ para todo } g \in G\}$ o centro de G.

a) Mostrar que $Z(G)$ é um subgrupo abeliano de G, e que $Z(G) = G$ se e somente se G é abeliano.

b) Se $K \leq Z(G)$ então K é subgrupo normal de G. Em particular $Z(G) \triangleleft G$.

c) Encontrar o centro dos grupos S_3, S_4, $\mathbb{H}_8$, D_4, $GL_n(\mathbb{R})$.

d) Se G é um grupo tal que o grupo quociente $G/Z(G)$ é cíclico, então $Z(G) = G$ e G é abeliano.

Ex. 24. Seja G um grupo e seja $a \in G$, denotamos $O(a) = \{gag^{-1} \mid g \in G\}$ o conjunto dos elementos em G que são conjugados com a ($O(a)$ é chamado Órbita de a), e $C(a) = \{g \in G \mid gag^{-1} = a\} = \{g \in G \mid ga = ag\}$ o centralizador (ou normalizador) de a em G.

a) Mostrar que $C(a) \leq G$ e que G é uma união de órbitas disjuntas de alguns dos seus elementos.

b) Mostrar que $|O(a)| = |G : C(a)|$. Em particular, se G é finito, $|G| = |O(a)||C(a)|$ e $|O(a)|$ divide a ordem de G.

c) Mostrar que $|O(a)| = 1$ (isto é, $O(a) = a$), se e somente se $a \in Z(G)$.

Ex. 25. Seja p um número primo e seja G um grupo, $|G| = p^n$. Mostrar que

a) $Z(G) \neq \{e\}$ e $|Z(G)| = p^k$, $k \geq 1$.

b) Se G não é abeliano, então $1 \leq k \leq n - 2$.

c) Se $n \leq 2$ o grupo G é abeliano.

d*) Se $e \neq H \triangleleft G$ então $Z(G) \cap H \neq e$. Em particular, se $|H| = p$ então $H \leq Z(G)$.

Ex. 26. Encontrar os grupos quocientes: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(m|n)$; S_n/A_n; A_4/K_4; $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$; $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+$.

Ex. 27. Mostrar que $\mathbb{H}_8/Z(\mathbb{H}_8) \cong D_4/Z(D_4) \cong \mathbb{Z}_2$; $S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$; $A_4/K_4 \cong \mathbb{Z}_3$.

Ex. 28. Seja $M = \{(a, c) \mid a, c \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$, definimos produto em M como sendo $(a_1, c_1)(a_2, c_2) = (a_1a_2, a_1c_2 + a_2c_1)$. Mostrar que M se torna um grupo abeliano, $N = \{(1, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$ é um subgrupo de M e $M/N \cong \mathbb{R}^*$.

Ex. 29. Seja $G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\} \subseteq GL_2(\mathbb{Q})$. Mostrar que G é um subgrupo de $GL_2(\mathbb{Q})$. Encontrar todos elementos de G de ordem finita e todos os subgrupos de G de ordem finita. Encontrar $Z(G)$. Mostrar que se M consiste das matrizes em G com $b = 0$, então M é um subgrupo de G e é isomorfo a $\mathbb{Q}^*$. Se H consiste das matrizes de G com $a = 1$, mostrar que $H \triangleleft G$, $H \cong \mathbb{Q}$ e $G/H \cong \mathbb{Q}^*$.

Ex. 30. Descrever os grupos abelianos finitos de ordem 3, 9, 27, 81, 243, 36, 240, 144, 1000.

Ex. 31. Quais são os subgrupos normais em S_3? Usando essa informação, descrever todos os homomorfismos de grupos $\varphi\colon S_3 \to \mathbb{Z}_6$.

Ex. 32. Mostrar que $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ é um grupo cíclico se e somente se $(m, n) = 1$.

Ex. 33. Mostrar que se H é um subgrupo do grupo cíclico G então H e G/H também são cíclicos. Mostrar que se $G = \mathbb{Z}_{\ltimes}$ então para todo $d|n$ existe um único subgrupo de G de ordem d. O recíproco é verdadeiro? (Isto é, se $|G| = n$, e para todo $d|n$ existe um único subgrupo de ordem d, o grupo G é cíclico?)

Ex. 34. Mostrar que se G é não abeliano e $|G| = 8$ então $G \cong \mathbb{H}_8$ ou $G \cong D_4$. Dica: G tem elementos de ordem 4 (justificar: quais as possíveis ordens de elementos de G?). Se $|a| = 4$ e $b \in G \setminus \langle a \rangle$, as classes laterais a esquerda (e a direita) são $\langle a \rangle$ e $\langle a \rangle b$. Temos $b^{-1}ab \in \langle a \rangle$, e $b^{-1}ab = a^{-1}$. Se $|b| = 2$ então $G \cong D_4$. Se $|b| = 4$, então $b^2 \notin \langle a \rangle b$ e $b^2 \in \langle a \rangle$, isto é, $b^2 = a^2$. Se $c = ab$, tem-se $c^2 = a^2$. verificar que $bc = a$ e $ca = b$ e construir um isomorfismo entre G e $\mathbb{H}_8$.