# 18 O Teorema da Categoria de Baire

**Lema.** *Seja $X$ um espaço métrico completo. Se $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$ é uma sucessão de subconjuntos fechados não vazios de $X$, então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.*

*Demonstração.* Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in F_n$. Então, porque $\operatorname{diam} F_n \to 0$, a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Logo $x_n \to x \in X$, porque $X$ é completo. Além disso, porque, para cada $k \in \mathbb{N}$, a sucessão $(x_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsucessão da primeira que está contida no fechado $F_k$, $x_{n+k} \to x \in F_k$. Logo $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. ∎

**Teorema de Baire.** *Seja $X$ um espaço completo. Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de subconjuntos abertos e densos de $X$, então $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ é denso em $X$.*

`[Um espaço topológico com esta propriedade diz-se um espaço de Baire.]`

*Demonstração.* Sejam $x \in X$ e $r > 0$. Queremos provar que $A \cap B_r(x) \neq \emptyset$. Como $A_1 \cap B_r(x)$ é um aberto não vazio, existem $x_1 \in X$ e $s > 0$ tais que $B_s(x_1) \subseteq A_1 \cap B_r(x)$. Podemos ainda afirmar que existe $r_1 \in ]0,1[$ tal que

$$B_{r_1}[x_1] \subseteq A_1 \cap B_r(x).$$

De igual modo, atendendo a que $A_2 \cap B_{r_1}(x_1)$ é um aberto não vazio, existem $x_2 \in X$ e $r_2 \in ]0, \frac{1}{2}[$ tais que

$$B_{r_2}[x_2] \subseteq A_2 \cap B_{r_1}(x_1).$$

Supondo já escolhidos $x_k$ e $r_k \in ]0, \frac{1}{k}[$ tais que $B_{r_k}[x_k] \subseteq A_k \cap B_{r_{k-1}}(x_{k-1})$, e atendendo a que $A_{k+1} \cap B_{r_k}(x_k)$ é um aberto não vazio, podemos escolher $x_{k+1} \in X$ e $r_{k+1} \in ]0, \frac{1}{k+1}[$ tais que

$$B_{r_{k+1}}[x_{k+1}] \subseteq A_{k+1} \cap B_{r_k}(x_k).$$

Construímos assim uma sucessão encaixada $(B_{r_n}[x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos fechados não vazios de $X$. Pelo lema anterior, existe $x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{r_n}[x_n] \subseteq \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap B_r(x)$, como queríamos demonstrar. ∎

**Corolário.** *Se um espaço métrico completo é reunião numerável de subconjuntos fechados, então pelo menos um deles tem interior não vazio.*

*Demonstração.* Seja $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família numerável de subconjuntos fechados tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$. Então cada $X \setminus F_n$ é aberto e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus F_n) = \emptyset$. Pelo teorema anterior concluímos que algum dos conjuntos $X \setminus F_k$ não é denso, isto é $F_k$ tem interior não vazio. ∎

**Definição.** Um subconjunto $Y$ de um espaço topológico $X$ diz-se:

(1) `raro` se o interior do seu fecho for vazio;

(2) `de primeira categoria` se for reunião numerável de subconjuntos raros;

(3) `de segunda categoria` se não for de primeira categoria, isto é, se $Y \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ com cada $F_n$ fechado, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(F_k) \neq \emptyset$.

`[Nota: O complementar de um subconjunto raro é denso.]`

**Corolário.** *Um espaço métrico completo é de segunda categoria. Além disso, num espaço métrico completo o complementar de um subconjunto de primeira categoria é de segunda categoria.* ■

**Teorema.** **(Princípio da limitação uniforme)** *Seja $U$ um subconjunto de segunda categoria de um espaço métrico $X$ e seja*

$$\mathcal{F} = \{f : X \to \mathbb{R}\,;\, f \text{ contínua e } \forall u \in U\ \{f(u)\,;\, f \in \mathcal{F}\} \text{ é limitada}\}.$$

*Então os elementos de $\mathcal{F}$ são uniformemente limitados numa bola fechada $B_r[x_0]$.*

*Demonstração.* Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$F_n = \{x \in X\,;\, |f(x)| \leq n \text{ para todo o } f \in \mathcal{F}\} = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}([-n, n]).$$

Cada $F_n$ é fechado e $U \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, por hipótese. Logo existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(F_k) \neq \emptyset$, como queríamos demonstrar. ■

**Teorema de Banach-Steinhaus.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços normados, $U$ um subconjunto de $X$ de segunda categoria e $\mathcal{F} \subseteq \mathsf{L}(X, Y)$ uma família de operadores lineares limitados tal que*

$$\forall u \in U \quad \sup\{\|T(u)\|\,;\, T \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

*Então existe $N > 0$ tal que, para todo o $T \in \mathcal{F}$, $\|T\| \leq N$. Em particular, o resultado é válido quando $U = X$ é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* A função $\begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|T(x)\| \end{array}$ é contínua, porque composição de funções contínuas. Logo, pelo teorema anterior, existe $B_r[x_0]$ tal que

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \ \forall x \in B_r[x_0]\ \ \forall T \in \mathcal{F}\ \ \|T(x)\| \leq n.$$

Isto implica que $\|T\| \leq N = \frac{n}{r}$, para todo o $T \in \mathcal{F}$, como verificamos em seguida. Se $T \in \mathcal{F}$ e $x \in B(X)$, então $x_0 + rx, x_0 - rx \in B_r[x_0]$, portanto

$$\|T(x)\| = \frac{1}{2r}\big\|T(x_0 + rx - (x_0 - rx))\big\| \leq \frac{2n}{2r} = N,$$

e então $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|\,;\, x \in B(X)\} \leq N$. ■