Questões	Valores	Notas
1.^{a}	2.5	
2.^{a}	2.5	
3.^{a}	2.5	
4.^{a}	2.5	
5.^{a} a)	1.5	
5.^{a} b)	1.5	
Total	11.5	

1.^{a} prova de MT-401/ MS - 991 – Análise Aplicada

1.^{o} semestre de 2017 – 09/05/2017

Nome:____

RA:____

Turma:____

*A*TENÇÃO: As quatro primeiras quêstões deverão ser feitas obrigatoriamente. Elas somam 10 pontos da prova. Apenas um item da quinta questão deverá ser escolhido. Este item valerá 1.5 ponto.

1.^{a} Questão. Seja

$$c = \{x = (\xi_j) \in l^\infty : \lim_{j\to\infty} \xi_j \text{ existe (e é finito)}\}.$$

a) Mostre que c é fechado em l^∞. (1 ponto)

b) Dizemos que $x = (\xi_j) \in l^\infty$ estabiliza se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq N$

$$\xi_N = \xi_j.$$

Seja $M = \{x \in l^\infty : x \text{ estabiliza}\}$. Mostre que c é o fecho de M. (1.5 ponto)

Resolução:

a) Para mostrarmos que c é fechado, tomemos uma sequência $(x_n) = \left(\xi_j^{(n)}\right)$ em c tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Basta mostrar então que $x \in c$. Como (x_n) converge para x temos que, dado $\epsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x, x_n) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \left|\xi_j - \xi_j^{(n)}\right| < \frac{\epsilon}{3} \ \forall n \geq N_1.$$

Em particular

$$\left|\xi_j - \xi_j^{(N_1)}\right| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Como o elemento x_{N_1} pertence a c (isto é, $\lim_{j\to\infty} \xi_j^{(N_1)}$ existe), temos que $\left(\xi_j^{(N_1)}\right)$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Logo, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\xi_j^{(N_1)} - \xi_l^{(N_1)}\right| < \frac{\epsilon}{3} \ \forall j, l \geq N_2.$$

Temos assim, para $j, l > N_2$

$$|\xi_j - \xi_l| \leq \left|\xi_j - \xi_j^{(N_1)}\right| + \left|\xi_j^{(N_1)} - \xi_l^{(N_1)}\right| + \left|\xi_l^{(N_1)} - \xi_l\right| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Dessa forma concluímos que (ξ_j) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, logo é convergente e, portanto, $x \in c$.

b) Seja $x = (\xi_j) \in c$. Mostraremos que toda bola aberta de centro x contém um ponto de M. Isso implica que $c \in \bar{M}$. Mas $M \subset c \Rightarrow \bar{M} \subset \bar{c} = c$ (pela letra a). Logo $c \subset \bar{M} \subset c \Rightarrow c = \bar{M}$.

Seja então $x = (\xi_j) \in c$ e $\epsilon > 0$. Como (ξ_j) converge, temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\xi_j - \xi_l| < \frac{\epsilon}{2} \ \forall j, l \geq N.$$

Em particular

$$|\xi_j - \xi_N| < \frac{\epsilon}{2} \ \forall j \geq N.$$

Tome $y \in M$ com $y = (\xi_1, \xi_2, \ldots, , \xi_{N-1}, \xi_N, \xi_N, \xi_N, \ldots)$. Então

$$d(x, y) = \sup_{j\geq N} |\xi_j - \xi_N| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Temos assim $y \in B(x, \epsilon)$.

2.^{a} Questão. Mostre que se $d(x_{n+1}, x_n) < ac^n$, com $a > 0$ e $c < 1$, então (x_n) é Cauchy (1.25 ponto). Uma sequência que decresce a uma taxa $d(x_{n+1}, x_n) \leq 1/n$ é, necessariamente, Cauchy? Justifique. (1.25 ponto)

Resolução: Para mostrarmos que se $d(x_{n+1}, x_n) < ac^n$ então (x_n) é de Cauchy, vejamos $d(x_m, x_n)$ para $m \geq n$. Temos, pela desigualdade triangular,

$$d(x_{m+1}, x_n) \leq d(x_{m+1}, x_m) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) < a(c^m + \cdots + c^n) = a \sum_{j=n}^{m} c^j.$$

Mas sabemos que $\sum_{j=1}^{\infty} c^j < \infty$ para $c < 1$, portanto $s_n = \sum_{j=1}^{n} c^j$ é de Cauchy, o que implica que, dado $\epsilon > 0$

$$|s_m - s_n| = \sum_{j=n}^{m} c^j < \epsilon$$

para m, n suficientemente grandes. Logo (x_n) é de Cauchy.

Note agora que, se $d(x_{n+1}, x_n) \leq 1/n$, (x_n) não necessariamente é de Cauchy. Basta tomar em $\mathbb{R}$, $x_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$. Temos assim

$$d(x_{n+1}, x_n) = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}.$$

Mas x_n não converge.

3.^{a} Questão. Seja c o espaço de Banach das sequências $(\eta_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{j\to\infty} \eta_j$ existe. A norma em c é dada por $\|y\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} |\eta_j|$. Considere o operador $T : l^2 \to c$ definido por

$$Tx = (\xi_1, \xi_1 + \frac{\xi_2}{2}, \xi_1 + \frac{\xi_2}{2} + \frac{\xi_3}{3}, \dots), \;\; x = (\xi_j) \in l^2.$$

a) Mostre que T é limitado e econtre sua norma. ($\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$ pode ser útil.) (0.75 ponto)
b) Mostre que $T : l^2 \to \mathcal{R}(T)$ é invertível e encontre T^{-1}. (0.75 ponto)
c) Mostre que $\mathcal{R}(T)$ é denso mas não fechado em c. (1 ponto)

Resolução:

a) A n-ésima componente de Tx é dada por

$$(Tx)_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_j}{j} \Rightarrow |(Tx)_n| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{|\xi_j|}{j} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\xi_j^2|} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^2|} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|x\|,$$

onde utilizamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato de (ξ_j) e $(1/j)$ pertencerem a l^2. Isto mostra que

$$\|Tx\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |(Tx)_n| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|x\| \Rightarrow \|T\| = \sup_{x\in l^2 - \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

Tome agora $x_0 = (\frac{1}{j}) \in l^2$ e temos

$$\|Tx_0\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |(Tx_0)_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}.$$

Além disso

$$\|x_0\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}}.$$

Portanto

$$\frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|} = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \Rightarrow \|T\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

b) Se $Tx = 0$, então temos

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = 0, \\
&\xi_1 + \frac{\xi_2}{2} = 0 \Rightarrow \xi_2 = 0, \\
&\xi_1 + \frac{\xi_2}{2} + \frac{\xi_3}{3} = 0 \Rightarrow \xi_3 = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Logo $x = 0$ e, portanto T é injetivo, o que implica que $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \longrightarrow l^2$ existe. Alem disso, se $Tx = y$, temos

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = \eta_1, \\
&\xi_1 + \frac{\xi_2}{2} = \eta_2 \Rightarrow \xi_2 = 2(\eta_2 - \eta_1), \\
&\xi_1 + \frac{\xi_2}{2} + \frac{\xi_3}{3} = \eta_3 \Rightarrow \eta_1 + \frac{2(\eta_2 - \eta_1)}{2} + \frac{\xi_3}{3} = \eta_3 \Rightarrow \xi_3 = 3(\eta_3 - \eta_2), \\
&\vdots \\
&\xi_j = j(\eta_j - \eta_{j-1})
\end{aligned}$$

Portanto

$$T^{-1}(\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots) = (\eta_1, 2(\eta_2 - \eta_1), 3(\eta_3 - \eta_2), \dots).$$

c) Seja $y = (\eta_j) \in c$. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\eta_j - \eta_N| < \epsilon, \ \ \forall j \geq N.$$

Tome $x \in l^2$ da forma $x = (\eta_1, 2(\eta_2 - \eta_1), 3(\eta_3 - \eta_2), \dots, N(\eta_N - \eta_{N-1}), 0, 0, 0 \dots)$. Temos assim

$$Tx = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N, \eta_N, \eta_N, \dots)$$

e, portanto

$$d(y, Tx) = \sup_{j \geq N} |\eta_j - \eta_N| \leq \epsilon.$$

Vemos assim que $\mathcal{R}(T)$ é denso em c.

Para mostrarmos que $\mathcal{R}(T)$ não é fechado em c, tome a sequência de pontos y_n em $\mathcal{R}(T)$ dada por

$$y_n = \left(1, 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}}, \dots, 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \dots \frac{1}{n\sqrt{n}}, 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \dots \frac{1}{n\sqrt{n}}, 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \dots \frac{1}{n\sqrt{n}}, \dots\right),$$

que é gerada pela sequência $x_n = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, 0\right)$ em l^2. Note que y_n converge para $y = \left(1, 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}}, \dots\right) \in c$, pois

$$d(y_n, y) = \sup_{m \geq n+1} \left| \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j\sqrt{j}} \right| = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j\sqrt{j}}.$$

Como a expressão acima é o resto de uma série convergente, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_n, y) < \epsilon\ \forall n > N$. Porém $y \notin \mathcal{R}(T)$, pois neste caso teríamos, $Tx = y$, com $x = (1/\sqrt{j}) \notin l^2$.

4.^{a} Questão. Seja $M \neq \emptyset$ um subconjunto qualquer de um espaço normado X. O aniquilador M^a de M é definido como o conjunto de todos os funcionais lineares em X que se anulam em todo ponto de M. Então Ma é um subconjunto do espaço dual X' de X.

a) Mostre que M^a é subespaço vetorial de X'. (1.0 ponto)
b) Mostre que M^a é fechado em X'. (1.5 ponto)

Resolução:

a) Sejam $f, f_1, f_2 \in M^a$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então
$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = 0 + 0 = 0, \ \ \forall x \in M.$$
Logo $f_1 + f_2 \in M^a$. Além disso
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha 0 = 0, \ \ \forall x \in M.$$
Logo $\alpha f \in M^a$.

b) Seja $f \in \overline{M^a}$. Então existe equência (f_n) em M^a tal que $f_n \to f$. Logo $\|f_n - f\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Mas para todo $x \in M$, temos
$$\|f(x)\| = \|f(x) - f_n(x)\| \leq \|f_n - f\|\|x\| \to 0,$$
logo $f(x) = 0\ \forall x \in M$. Portanto $f \in M^a$, o que implica que M^a é fechado.

5.^{a} Questão.

a) Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach de dimensão infinita e B uma base de Hammel para X. Mostre que B é não enumerável.(Dica: Teorema de Baire) (1.5 ponto)
b) Seja um funcional subaditivo p em um espaço normado X, contínuo em $x = 0$ e tal que $p(0) = 0$. Mostre que p é contínuo. (1 ponto)

Resolução:

a) Suponha B enumerável. Então $B = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ e, dado $x \in X$ ele pode ser escrito unicamente como
$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$
para algum $n \in \mathbb{N}$ e os $\alpha_i' s \in K$. Denotando $V_n = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$, temos assim
$$X = \cup_{n=1}^{\infty} V_n.$$
Mas como vimos em aula, todo subespaço proprio fechado de X é nunca denso em X e V_n é fechado por ter dimensão finita. Logo X é magro, o que é uma contradição pelo Teorema de Baire, já que X por hipótese é completo.

b) Como p é contínuo em $x = 0$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
$$|p(x)| = |p(x) - p(0)| < \epsilon \ \text{ sempre que } \|x\| < \delta.$$
Seja agora $y \in X$ arbitrário. Temos assim, para todo $x \in X$,
$$p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y) \Rightarrow |p(x) - p(y)| \leq |p(x - y)|.$$
Logo, dado $\epsilon > 0$, tome o mesmo δ apontado acima. Então
$$|p(x) - p(y)| \leq |p(x - y)| < \epsilon, \ \ \text{sempre que } \|x - y\| < \delta.$$

Isto mostra que p é contínuo.

Boa Prova!