Questões	Valores	Notas
$1.^a$	2.5	
$2.^a$	2.5	
$3.^a$	3.0	
$4.^a$	2.0	
$5.^a$ a)	1.5	
$5.^a$ b)	1.5	
Total	11.5	

$2.^a$ prova de MT- 401/ MS - 991 – Análise Aplicada

$1.^o$ semestre de 2017 – 20/06/2017

Nome:____

RA:____

$1.^a$ Questão. Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert e seja $T : H_1 \longrightarrow H_2$ operador linear limitado. Mostre que

a) Seja $S \subset H_2$ um subespaço de H_2. Mostre que $\overline{S} = S^{\perp\perp}$. (0.5 ponto)
b) $\mathcal{R}(T)^{\perp} = \mathcal{N}(T^*)$. (1 ponto)
c) $\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{N}(T^*)^{\perp}$. (0.5 ponto)

Resolução:

a) Seja $y \in S$. Então $\langle y, z\rangle_2 = 0$ para todo $z \in S^{\perp}$. Logo $y \in S^{\perp\perp} \Rightarrow S \subset S^{\perp\perp}$. Dessa forma temos $\overline{S} = \overline{S^{\perp\perp}} = S^{\perp\perp}$, já que $S^{\perp\perp}$ é fechado. Seja agora $y \in S^{\perp\perp}$. Como $\overline{S}$ é subespaço fechado, sabemos que $y = z_1 + z_2$, onde $z_1 \in \overline{S}$ e $z_2 \in \overline{S}^{\perp}$. Como $\overline{S} \subset S^{\perp\perp}$, temos que $z_1 \in S^{\perp\perp}$ e como $S^{\perp\perp}$ é espaço vetorial, temos que $z_2 = y - z_1 \in S^{\perp\perp}$. Mas $z_2 \in \overline{S}^{\perp} \subset S^{\perp}$. Logo $\langle z_2, z_2\rangle_2 = 0 \Rightarrow z_2 = 0 \Rightarrow y \in \overline{S}$.
b) $y \in \mathcal{R}(T)^{\perp} \Leftrightarrow \langle Tx, y\rangle_2 = 0\ \forall x \in H_1 \Leftrightarrow \langle x, T^*y\rangle_1 = 0\ \forall x \in H_1 \Leftrightarrow T^*y = 0 \Leftrightarrow y \in \mathcal{N}(T^*)$.
c) Pelos itens anteriores temos $\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{R}(T)^{\perp\perp} = \mathcal{N}(T^*)^{\perp}$.

$2.^a$ Questão. Seja Y subespaço fechado de um espaço de Hilbert H.

a) Mostre que o operador projeção ortogonal de H em Y é auto-adjunto. (1.5 ponto)
b) Se $P : H \longrightarrow H$ é uma projeção ortogonal e $S : H \longrightarrow H$ é operador unitário, mostre que $Q = S^{-1}PS$ é uma projeção ortogonal.(1 ponto)

Resolução:

a) Sabemos que podemos decompor o espaço de Hilbert H em $H = Y \oplus Y^{\perp}$, onde $x \in H$ tem a forma $x = y + z$, com $y = Px \in Y$ e $z \in Y^{\perp}$. Claramente P é operador liner limitado, logo existe P^*. Portanto $\langle x_1, P^*x_2\rangle = \langle Px_1, x_2\rangle = \langle y_1, y_2 + z_2\rangle = \langle y_1, y_2,\rangle = \langle y_1 + z_1, y_2\rangle = \langle x_1, Px_2\rangle\ \forall x_1, x_2 \in H$. Logo $P = P^*$.
b) Note que Q é idempotente, pois $Q^2 = S^{-1}PSS^{-1}PS = S^{-1}PS$ e auto-ajunto, pois $Q^* = S^*P^*(S^{-1})^* = S^{-1}PS^{**} = S^{-1}PS = Q$. Logo Q é projeção.

$3.^a$ Questão. Seja H um espaço de Hilbert real. Sejam $u, v \in H$ tal que u não seja ortogonal à v. Defina $T : H \longrightarrow H$ da seguinte maneira: $y = Tx$ se e somente se y é o único ponto na reta

$$L_x = \{x + tv : t \in \mathbb{R}\}$$

que é perpendicular a u.

a) Mostre que T é operador linear limitado e encontre sua imagem. (Dica: Dado x, calcule y em função de x, u e v.) (1.5 ponto)
b) Se u, v são L.D., mostre que T é auto-adjunto. O que é T neste caso? (1 ponto)

Resolução:

a) Dado x, queremos encontrar $y \in L_x$ tal que $\langle u, y\rangle = 0$. Logo $0 = \langle u, y\rangle = \langle u, x\rangle + t\,\langle u, v\rangle$. Com isso encontramos $t = -\frac{\langle u,x\rangle}{\langle u,v\rangle}$ e temos assim $y = Tx = x - \frac{\langle u,x\rangle v}{\langle u,v\rangle}$. Claramente T é limitado, pois $\|Tx\| = \left\| x - \frac{\langle u,x\rangle v}{\langle u,v\rangle}\right\| \leq \|x\| + \frac{|\langle u,x\rangle|}{|\langle u,v\rangle|}\|v\| \leq \|x\| + \frac{\|u\|\|v\|}{|\langle u,v\rangle|}\|x\| = \left(1 + \frac{\|u\|\|v\|}{|\langle u,v\rangle|}\right)\|x\|$. Note que a imagem de T é o complemento ortogonal de $\operatorname{span}\{u\}$. Para vermos isso, primeiro note que $\mathcal{R}(T) \subset \operatorname{span}\{u\}^{\perp}$. Além disso, dado $y \in \operatorname{span}\{u\}^{\perp}$, construa a reta L_y e analise em $t = 0$, que teremos $y = Ty$.

b) Se u e v são L.D., temos $v = \lambda u$ para algum $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Desta forma, $y = Tx = x - \frac{\langle x,u\rangle}{\|u\|^2}u$ e T nada mais é que a projeção ortogonal de x em $\operatorname{span}\{u\}^{\perp}$ e sabemos que o operador projeção ortogonal é auto-adjunto.

4.ª **Questão**. Seja $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência ortonormal em um espaço com produto interno $(X, \langle , \rangle)$.

a) A sequência $(\langle x, e_n\rangle)_{n=1}^{\infty}$ pertence a l^2 (onde x é um elemento arbitrário de X)?

b) Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle \langle y, e_n\rangle| \leq \|x\|\|y\| \;\; \forall\, x, y \in X.$$

Resolução:

a) Pela desigualdade de Bessel, sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Logo $(\langle x, e_n\rangle)_{n=1}^{\infty}$ pertence a l^2.

b) Como $(\langle x, e_n\rangle)_{n=1}^{\infty}, (\langle y, e_n\rangle)_{n=1}^{\infty} \in l^2$, podemos utilizar a desigualdade de Cauchy-Schwarz, que nos diz que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle \langle y, e_n\rangle| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, e_n\rangle|^2} \leq \|x\|\|y\|,$$

onde na última desigualdade utilizamos Bessel.

5.ª **Questão**. Mostre que se f é uma função C^3 real em um intervalo $[a, b]$ e, se $\xi \in (a, b)$ é um zero simples de f, então o algorítmo

$$x_{n+1} = Tx_n \equiv x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

possui um ponto fixo em alguma vizinhança de ξ.

Resolução: Defina $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x) - \frac{f''(x)f(x)}{f'(x)}}$. Então temos

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)(f'(x) - \frac{f''(x)f(x)}{f'(x)}) + f(x)\left[f''(x) - \frac{(f'''(x)f(x) + f''(x)f'(x))f'(x) + f''(x)f(x)f'(x)}{f'(x)^2}\right]}{\left(f'(x) - \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)}\right)^2}.$$

Logo, em $x = \xi$, temos

$$g'(\xi) = 1 - \frac{f'(\xi)^2}{f'(\xi)^2} = 0,$$

pois $f(\xi) = 0$. Pela continuidade de $g'(x)$, temos que $|g'(x)| < 1$ em uma vizinhança de ξ. Logo $g(x)$ possui ponto fixo nessa vizinhança.

6.^{a} Questão. Seja $H = L^2(0,l)$. Mostre que o operador Hamiltoniano $T = -\frac{d^2}{dx^2}$ com domínio $\mathcal{D}(T) = \{f \in \mathcal{D}_{\max}(0,l) : f(l) = e^{i\theta} f(0),\ f'(l) = e^{i\theta} f'(0)\}$ é simétrico, onde $\mathcal{D}_{\max}(0,l)$ é o máximo domínio no qual o operador d^2/dx^2 está bem definido. (1 ponto)

Resolução: Sejam $f, g \in \mathcal{D}(T)$. Então

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g\rangle &= -\int_0^l \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\overline{g(x)} = -\left.\frac{df(x)}{dx}\overline{g(x)}\right|_0^l + \int_0^l \frac{df(x)}{dx}\frac{d\overline{g}(x)}{dx} \\
&= -f'(l)\overline{g(l)} + f'(0)\overline{g(0)} + \left. f(x)\frac{d\overline{g}(x)}{dx}\right|_0^l - \int_0^l f(x)\frac{d^2\overline{g(x)}}{dx} \\
&= -e^{i\theta} f'(0) e^{-i\theta}\overline{g'(0)} + f'(0)\overline{g(0)} + f(l)\overline{g'(l)} - f(0)\overline{g'(0)} + \langle f, Tg\rangle \\
&= 0 + e^{i\theta} f(0) e^{-i\theta}\overline{g'(0)} - f(0)\overline{g'(0)} + \langle f, Tg\rangle \\
&= 0 + \langle f, Tg\rangle = \langle f, Tg\rangle
\end{aligned}$$

Boa Prova!