Questões	Valores	Notas
1.ª	2.5	
2.ª	2.5	
3.ª	2.5	
4.ª	2.5	
Bônus.	1.0	
Total	11.0	

Prova 1 de MA- 327– Álgebra Linear - Turmas A e B

2.º semestre de 2017 – 05/09/2017

Nome:______________________________

RA:______________________________

Turma:______________________________

1.ª **Questão.** Uma matriz é dita triangular inferior quando todos os elemetos acima da diagonal principal da matriz são nulos. Analogamente, uma matriz é dita triangular superior quando todos os elementos abaixo da diagonal principal da matriz são nulos.

a) (1.0) Mostre que os conjuntos $V_I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ das matrizes triangulares inferiores e $V_S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ das matrizes triangulares superiores são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

b) (1.0) Mostre que $\mathbb{R}^{n\times n} = V_I + V_S$.

c) (0.5) É verdade que $\mathbb{R}^{n\times n} = V_I \oplus V_S$?

Resolução:

a) Vejamos o caso das matrizes triangulares inferiores. O procedimento é análogo para o caso das matrizes triangulares superiores.

Primeiramente, note que matriz nula pertence a V_I, já que todos os elementos acima da diagonal são (obviamente) nulos para esta matriz. Além disso, sejam $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in V_I$ quaisquer. Então $a_{ij} = b_{ij} = 0$ sempre que $i < j$. Se $C = (c_{ij}) = A + B$, temos

$$(c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

e, portanto, $c_{ij} = 0 + 0 = 0$ sempre que $i < j$. Concluímos assim que $A + B \in V_I$. Seja agora $\lambda \in \mathbb{R}$ e $D = \lambda A$. Temos $D = (d_{ij}) = (\lambda a_{ij})$ e, portanto, $d_{ij} = \lambda \times 0 = 0$ sempre que $i < j$. Logo $\lambda A \in V_I$. Desta forma, por um resultado apresentado em sala, concluímos que V_I é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

b) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz qualquer em $\mathbb{R}^{n\times n}$. Defina as matrizes $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ por

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } i \geq j \\ 0 & \text{se } i < j \end{cases}$$

e

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \geq j \\ a_{ij} & \text{se } i < j. \end{cases}$$

Note que $B \in V_I$ e $C \in V_S$ e, claramente, $A = B + C$. Portanto, $\mathbb{R}^{n\times n} \subset V_I + V_S$. A inclusão $V_I + V_S \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ é trivial. Concluímos então que $\mathbb{R}^{n\times n} = V_I + V_S$.

c) Não. A matriz identidade $I_{n\times n}$ pertence tanto a V_I quanto a V_S.

2.^{a} Questão.

a) (1.0) Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Sejam $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ vetores linearmente independentes (L.I). Mostre que os vetores $v_1, v_2 - v_1, \ldots, v_n - v_1$ também são linearmente independentes (L.I).

b) (1.5) Seja W o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + 4z = 0\}.$$

Obtenha uma base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ de forma que $\{u_1, u_2\}$ seja uma base para W.

Resolução:

a) A equação

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2(v_2 - v_1) + \cdots + \alpha_n(v_n - v_1) = 0$$

adimite apenas a solução trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Isto pode ser visto reorganizando seus termos da forma

$$(\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n)v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n = 0.$$

Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é L.I., temos que $\alpha_n = \alpha_{n-1} = \cdots = \alpha_2 = 0$, juntamente com

$$\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n = 0.$$

Vemos facilmente que os $\alpha_i's$ são todos nulos, o que mostra que $\{v_1, v_2 - v_1, \ldots, v_n - v_1\}$ é L.I.

b) Vetores em W têm a forma $v = (2y - 4z, y, z, w) = y(2,1,0,0) + z(-4,0,1,0) + w(0,0,0,1)$. Portanto, como y, z e w são arbitrários temos que

$$W = [\{(2,1,0,0), (-4,0,1,0), (0,0,0,1)\}].$$

Para determinar como completar a base vamos seguir o processo de completamento. Ou seja, primeiro vamos colocar os vetores em uma matriz e escalonar:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vemos assim que $W = [\{(1, 1/2, 0, 0), (0, 1, 1/2, 0), (0,0,0,1)\}]$. Além disso, podemos completar a matriz acima de maneira a torná-la uma matriz quadrada escalonada acrescentando o vetor $(0,0,1,0)$. Teremos assim

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uma base de $\mathbb{R}^4$ satisfazendo a condição desejada é

$$B = \{(1, 1/2, 0, 0), (0, 1, 1/2, 0), (0,0,0,1), (0,0,1,0)\}.$$

3.^{a} Questão. Seja $V = P_3(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real formado pelos polinômios de grau menor ou igual a 3 e coeficientes reais. Considere o conjunto

$$\beta = \{1 - x,\ x - x^2,\ x^2 - x^3,\ 1 + x + x^2 + x^3\}.$$

a) (1.0) Mostre que β é uma base.

b) (1.0) Seja $\eta = \{1, x, x^2, x^3\}$ a base canônica de V, determine a matriz mudança de base $[I]^{\eta}_{\beta}$. Seja $u \in V$ tal que

$$[u]_\eta = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix},$$

calcule $[u]_\beta$.

c) (0.5) Seja

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

determine a base γ de V para a qual $P = [I]^{\beta}_{\gamma}$.

Resolução:

a) Note que

$$a(1 - x) + b(x - x^2) + c(x^2 - x^3) + d(1 + x + x^2 + x^3) = 0$$

nos leva ao sistema linear

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ -a + b + d = 0 \\ -b + c + d = 0 \\ -c + d = 0 \end{cases}$$

Este sistema possui a forma escalonada

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ +b + 2d = 0 \\ c + 3d = 0 \\ 4d = 0, \end{cases}$$

de onde vemos, facilmente, que $a = b = c = d = 0$. Logo β é L.I. Como temos quatro vetores L.I. em um espaco de dimensão 4, temos que β é base de $P_3(\mathbb{R})$.

b) Encontraremos primeiramente $[I]^{\beta}_{\eta}$ e em seguida sua inversa $([I]^{\beta}_{\eta})^{-1} = [I]^{\eta}_{\beta}$. Como η é a base canônica de $P_3(\mathbb{R})$, vemos facilmente que

$$[I]^{\beta}_{\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sua inversa (a qual pode ser calculada pelo processo de escalonamento) é dada por

$$[I]^{\eta}_{\beta} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Para $[u]_\eta = (2, 0, 1, 7)$, temos $[u]_\beta = [I]_\beta^\eta [u]_\eta = (-1/2, -3, -9/2, 5/2)$.

c) **Primeira solução:** Seja $\gamma = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Temos

$$\begin{cases} 1 - x = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \\ x - x^2 = 0v_1 + v_2 + 0v_3 + 0v_4 \\ x^2 - x^3 = 0v_1 + 0v_2 + v_3 + 0v_4 \\ 1 + x + x^2 + x^3 = -v_1 - v_2 - v_3 + 0v_4, \end{cases}$$

de onde tiramos facilmente que $v_2 = x - x^2$, $v_3 = x^2 - x^3$. Somando a primeira com a última equação, temos

$$v_4 = 2 + x^2 + x^3$$

e, portanto

$$v_1 = -1 - x - x^2 - x^3 - v_2 - v_3 = -1 - x - x^2 - x^3 - x + x^2 - x^2 + x^3 = -1 - 2x - x^2.$$

Temos assim

$$\gamma = \{-1 - 2x - x^2, x - x^2, x^2 - x^3, 2 + x^2 + x^3\}.$$

Segunda solução: Calculando a matriz inversa de $P = [I]_\gamma^\beta$ via o processo de escalonamento temos:

$$[I]_\beta^\gamma = P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pela definição de $[I]_\beta^\gamma$ as colunas da matriz acima são as coordenadas dos vetores de γ na base β. Logo

$$\gamma = \{-1 - 2x - x^2, x - x^2, x^2 - x^3, 2 + x^2 + x^3\}.$$

4.^{a} Questão. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $\dim(V) = n \geq 1$, sobre um corpo $\mathbb{F}$. Diremos que uma transformação linear $T : V \to V$ satisfaz a propriedade (KI) se

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T).$$

a) (0.75) Mostre que se T for injetora então T não pode satisfazer a propriedade (KI).
b) (0.75) Mostre que se T satisfaz a propriedade (KI) então n é par.
c) (1.0) Dê um exemplo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que satisfaz a propriedade (KI).

Solução:

a) Suponhamos que T seja injetora e que T satisfaça a propriedade (KI). Por um teorema visto em sala o fato de T ser injetora implica que $\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$. Agora, como T satisfaz a propriedade (KI) temos $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$. Assim, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem temos:

$$n = \dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = 0$$

caindo em contradição já que $n \geq 1$. Logo, se T for injetora T não pode satisfazer a propriedade (KI).

b) Suponha que T satisfaz a propriedade (KI). Então $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Ker}(T)$ e, portanto, o Teorema do Núcleo o e da Imagem nos dá

$$n = \dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2 \cdot \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

Logo n é um número par.

c) Pelo Teorema do Núcleo e da imagem conforme aplicado na alternativa (b), segue que,

$$4 = 2 \cdot \dim(\mathrm{Im}(T)) \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2.$$

Consideremos a base canônica $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ onde $e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,0,1)$ e $e_4 = (0,0,0,1)$. Observe que se $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ for tal que

$$T(e_1) = 0,\ T(e_2) = 0,\ T(e_3) = e_1,\ T(e_4) = e_2$$

teremos $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{span}(\{e_1, e_2\})$ e $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{span}(\{e_1, e_2\})$, logo T irá satisfazer a propriedade (KI). Para construir tal transformação basta definir

$$T(x, y, z, w) = (z, w, 0, 0).$$

Tal transformação T satisfaz a propriedade (KI).

Questão bônus. Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funções reais contínuas em $[a, b]$. Considere a matriz quadrada $n \times n$, $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$ cujas entradas são dadas por

$$g_{ij} = \int_a^b f_i(x) f_j(x) dx.$$

Mostre que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ são linearmente dependentes se, e somente se, $\det G = 0$. (1.0)

Resolucao: Primeiro vamos fazer a ida. Suponhamos que $f_1, \ldots, f_n$ sejam linearmente dependentes. Então, existem constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ não todas nulas tais que

$$a_1 f_1 + \ldots a_n f_n = 0.$$

Assim, dado qualquer $1 \leq j \leq n$ temos

$$\sum_{i=1}^n a_1 f_i(x) f_j(x) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \int_a^b f_i(x) f_j(x) dx = 0. \tag{1}$$

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ as colunas de G, observe que a i-ésima entrada de v_j é igual a $\int_a^b f_i(x) f_j(x) dx$. Ou seja, a igualdade (1) implica

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0 \Rightarrow \det G = 0.$$

Agora vamos provar a volta. Suponhamos que $\det G = 0$. Neste caso o sistema linear homogêneo $G \cdot v = 0$ admite uma solução

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

onde nem todas as entradas são nulas. Como $G \cdot a = 0$ temos $a^t \cdot G \cdot a = 0$, ou seja,

$$0 = (a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_n) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \cdot a_j \cdot g_{ij}.$$

Mas

$$a_i \cdot a_j \cdot g_{ij} = \int_a^b a_i f_i(x) \cdot a_j f_j(x) dx$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \cdot a_j \cdot g_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_a^b a_i f_i(x) \cdot a_j f_j(x) dx$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i f_i(x) \cdot a_j f_j(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i f_i(x) \right)^2 dx.$$

Logo

$$0 = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i f_i(x) \right)^2 dx.$$

Como a função que está dentro da integral é não negativa então a última igualdade implica que esta função é identicamente nula, ou seja,

$$\sum_{j=1}^n a_i f_i(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Portanto $f_1, f_2, \ldots, f_n$ são $L.D$ como queríamos demonstrar. $\square$

Boa Prova!