Questões	Valores	Notas
1.ª	2.5	
2.ª	2.5	
3.ª	2.5	
4.ª	2.5	
Bônus.	1.0	
Total	11.0	

Prova 2 de MA- 327– Álgebra Linear - Turmas A e B

2.º semestre de 2017 – 19/10/2017

Nome: ______________________________

RA:______________________________

Turma:______________________________

1.ª Questão. Considere em $P_2(\mathbb{R})$ a seguinte operação

$$\langle p(t), q(t)\rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p(1)q(1)$$

com $p(t), q(t) \in P_2(\mathbb{R})$.

a) (1.5) Mostre que a operação acima define um produto interno em $P_2(\mathbb{R})$ e calcule a matriz deste produto interno na base canônica.

b) (1.0) Utilizando a matriz do produto interno determine $< p, q >$ onde $p(t) = 1$ e $q(t) = 2 + t^2$. Qual é o ângulo determinado pelos polinômios p e q?

Resolução: Vejamos, primeiramente, que a operação acima define um produto interno.

a) i) Simetria:

$$\langle p(t), q(t)\rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p(1)q(1) = q(0)p(0) + q'(0)p'(0) + q(1)p(1) = \langle q(t), p(t)\rangle .$$

ii) Positividade:

$$\langle p(t), p(t)\rangle = p(0)^2 + p'(0)^2 + p(1)^2 \geq 0.$$

Além disso, se $\langle p(t), p(t)\rangle = 0$, temos $p(0) = p'(0) = p(1) = 0$. Denotando $p(t) \equiv a + bt + ct^2$, temos $a = 0$, $b = 0$ e $a + b + c = 0$, o que implica que $a = b = c = 0$. Logo, $\langle p(t), p(t)\rangle = 0 \Leftrightarrow p(t) = 0$.

iii) Distributividade:

$$\begin{aligned}\langle p + q, r\rangle &= (p + q)(0)r(0) + (p + q)'(0)r'(0) + (p + q)(1)r(1)\\ &= p(0)r(0) + p'(0)r'(0) + p(1)r(1) + q(0)r(0) + q'(0)r'(0) + q(1)r(1) = \langle p, r\rangle + \langle q, r\rangle\end{aligned}$$

iv) Homogeneidade:

$$\begin{aligned}\langle \lambda p, q\rangle &= (\lambda p)(0)q(0) + (\lambda p)'(0)q'(0) = (\lambda p)(1)q(1)\\ &= \lambda \left[p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p(1)q(1)\right] = \lambda \langle p(t), q(t)\rangle\end{aligned}$$

Para encontrarmos a matriz deste produto interno, vejamos

$$\langle 1, 1\rangle = 2, \langle 1, x\rangle = 1, \langle 1, x^2\rangle = 1,$$
$$\langle x, 1\rangle = 1, \langle x, x\rangle = 2, \langle x, x^2\rangle = 1,$$
$$\langle x^2, 1\rangle = 1, \langle x^2, x\rangle = 1, \langle x^2, x^2\rangle = 1.$$

A matriz do produto interno é, então, dada por

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\langle p, q\rangle = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 5.$$

Além disso, temos

$$\langle p, p\rangle = \langle 1, 1\rangle = 2$$
$$\langle q, q\rangle = \langle 2 + x^2, 2 + x^2\rangle = 13.$$

Desta forma,

$$\cos\theta = \frac{\langle p, q\rangle}{\|p\|\|q\|} = \frac{5}{\sqrt{2}\sqrt{13}} \Rightarrow \theta = \arccos\frac{5}{\sqrt{26}}.$$

2.^{a} Questão.

a) (1.5) Sejam u e v em um espaço vetorial complexo com produto interno. Mostre que

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\right).$$

b) (1.0) Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita e sejam U e W subespaços vetoriais de V tais que

$$V = U \oplus W$$

mostre que existe um produto interno $< \cdot, \cdot >$ em V tal que

$$< u, w >= 0$$

para todos $u \in U$ e $w \in W$.

Resolução:

a) Note que

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\
\|u-v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\
i\|u+iv\|^2 &= i\langle u+iv, u+iv\rangle = i\langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle - \langle v, u, \rangle + i\langle v, v\rangle \\
i\|u-iv\|^2 &= i\langle u-iv, u-iv\rangle = i\langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle + \langle v, u, \rangle + i\langle v, v\rangle
\end{aligned}$$

Combinando as equações acima temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\right) &= \frac{1}{4}\left(2\langle u, v\rangle + 2\langle v, u\rangle + 2\langle u, v\rangle - 2\langle v, u\rangle\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(4\langle u, v\rangle\right) = \langle u, v\rangle.
\end{aligned}$$

b) Sejam $\{v_1, \ldots, v_k\}$ base de U e $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ base de W. Como $V = U \oplus W$, temos que $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ é base de V. Escolha a matriz identidade como sendo a matriz do produto interno em V, ou seja, tome

$$A = [I]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Como A é trivialmente simétrica e positiva definida, por um teorema visto em sala de aula, A define um produto interno tomando:

$$< u, v >:= Y^* \cdot A \cdot X \tag{1}$$

onde $X = [u]_\beta$ e $Y = [v]_\beta$. Vamos mostrar que esse produto interno satisfaz o que queremos. Tome $v_i \in \{v_1, \ldots, v_k\}$ e $v_j \in \{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ quaisquer. Observe que

$$X := [v_i]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_i := \text{i-ésimo vetor da base canônica de } \mathbb{R}^n,$$

$$Y^* := ([v_j]_\beta)^* = (0 \ldots 0\ 1\ 0 \ldots 0) = e_j^t := \text{transposto do j-ésimo vetor da base canônica de } \mathbb{R}^n.$$

Assim temos,

$$< v_i, v_j >= e_j^t \cdot e_i.$$

Mas observe que $e_j^t \cdot e_i = 0$ se $i \neq j$ e 1 se $i = j$. Como $v_i \in \{v_1, \ldots, v_k\}$ e $v_j \in \{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ então temos

$$< v_i, v_j >= 0.$$

Agora, tome $u \in U$ e $v \in W$ quaisquer. Então podemos escrever $u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$ e $v = \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j v_j$. Logo

$$< u, v >=< \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i, \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j v_j >= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} < v_i, v_j >= 0.$$

Portanto, dados quaisquer $u \in U$ e $v \in W$ temos, para o produto interno definido por (1), $< u, v >= 0$, como queríamos.

3.^{a} Questão. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por

$$T(x, y, z) = (y + 3z, -y + 2z, z)$$

e seja $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

a) (1.0) Mostre que T possui três autovalores $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 0$. Determine os autoespaços V_1, V_{-1} e V_0 associados respectivamente a λ_1, λ_2 e λ_3.

b) (1.0) Diagonalize T, ou seja, encontre uma matriz diagonal D e uma matriz invertível P de forma que

$$[T]^\beta_\beta = P^{-1} \cdot D \cdot P.$$

c) (0.5) Calcule T^{2017}.

Solução:

a) Primeiramente vamos calcular a matriz de T na base canônica. Uma vez que

$$T(1, 0, 0) = (0, 0, 0), T(0, 1, 0) = (1, -1, 0) \quad \text{e} \quad T(0, 0, 1) = (3, 2, 1)$$

temos

$$[T]^\beta_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico é dado por

$$p(\lambda) = \det([T]^\beta_\beta - \lambda \cdot I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 3 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(1 + \lambda)(1 - \lambda).$$

Assim, uma vez que os autovalores de T coincidem com as raízes do polinômio característico, temos que os autovalores de fato são $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 0$. Agora vamos calcular os autoespaços V_1, V_{-1} e V_0. Observe que

$$\begin{aligned} V_1 = \mathrm{Ker}(T - 1 \cdot I) &= \{(x, y, z) : (y + 3z, -y + 2z, z) - (x, y, z) = 0\} \\ &= \{(x, y, z) : x = y + 3z, y = z\} \\ &= \{(4y, y, y) : y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{span}\{(4, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} V_{-1} = \mathrm{Ker}(T - (1) \cdot I) &= \{(x, y, z) : (y + 3z, -y + 2z, z) + (x, y, z) = 0\} \\ &= \{(x, y, z) : x = -y - 3z, z = 0\} \\ &= \{(-y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{span}\{(-1, 1, 0)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_0 = \mathrm{Ker}(T + 0 \cdot I) &= \{(x, y, z) : (y + 3z, -y + 2z, z) = 0\} \\ &= \{(x, y, z) : y = -3z, y = 2z, z = 0\} \\ &= \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{span}\{(1, 0, 0)\}. \end{aligned}$$

b) Considere $\gamma = \{v_1 = (4, 1, 1), v_2 = (-1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0)\}$. Observe que γ é um subconjunto ordenado de $\mathbb{R}^3$ formado por autovetores de T associados a autovalores distintos de

T (devido ao feito na alternativa (a)). Portanto γ é L.I e, consequentemente, é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T. Agora, considere $D := [T]_\gamma^\gamma$. Assim,

$$D = [T]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(v_1)]_\gamma & [T(v_2)]_\gamma & [T(v_3)]_\gamma \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, sabemos que

$$[T]_\beta^\beta = ([T]_\gamma^\beta)^{-1} \cdot [T]_\gamma^\gamma \cdot [T]_\gamma^\beta, \tag{2}$$

portanto basta tomar $P = [T]_\gamma^\beta$. Para determinar P observe que

$$P^{-1} = [T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, para determinar P basta usar o processo de escalonamento para inverter a matriz P^{-1}. Fazendo o escalonamento obtemos

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

concluindo o que queríamos.

c) Observe que a equação (2) do item anterior nos mostra que

$$[T]_\beta^\beta = P^{-1} \cdot D \cdot P \Rightarrow ([T]_\beta^\beta)^{2017} = P^{-1} \cdot D^{2017} \cdot P. \tag{3}$$

Agora, observe que

$$D^{2017} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2017} = \begin{pmatrix} 1^{2017} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{2017} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D.$$

Logo, por (3) temos $([T]_\beta^\beta)^{2017} = P^{-1} \cdot D^{2017} \cdot P = P^{-1} \cdot D \cdot P = [T]_\beta^\beta$. Em particular $T^{2017} = T$. Portanto

$$T^{2017}(x, y, z) = (y + 3z, -y + 2z, z).$$

4.^{a} Questão. Considere os subespaços $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 2x+3y-z+w=0\}$ e $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 3x-y+z+2w=0\}$ de $\mathbb{R}^4$.

a) (1.5) Determine uma base β para o subespaço $U \cap V$ e, a partir desta base, encontre uma base ortonormal γ de $U \cap V$.

b) (1.0) Seja $v = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$, determine $[v]_\gamma$ onde γ é a base que você encontrou na alternativa (a).

Solução: Primeiramente vamos determinar o subespaço $U \cap V$. Um vetor $v = (x,y,z,w)$ pertence a U e a V se, e somente se,

$$\begin{aligned} 2x+3y-z+w &= 0 \quad \text{e} \\ 3x-y+z+2w &= 0 \end{aligned}$$

Somando as duas equações temos

$$5x+2y+3w = 0 \Rightarrow w = -\frac{5}{3}x - \frac{2}{3}y.$$

Substituindo na primeira equação temos:

$$2x+3y-z-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}y = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{3}x+\frac{7}{3}y.$$

Logo $v = \left(x, y, \frac{1}{3}x+\frac{7}{3}y, -\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}y\right) = \frac{x}{3}(3,0,-1,-5) + \frac{y}{3}(0,3,7,-2)$. Assim

$$U \cap V = \text{span}\{(3,0,-1,-5), (0,3,7,-2)\}.$$

Portanto

$$\beta = \{v_1 = (3,0,-1,-5), v_2 = (0,3,7,-2)\}$$

é uma base de $U \cap V$. Agora vamos aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt sobre a base β para determinar uma base ortogonal $\{q_1, q_2\}$ para $U \cap V$ e, depois, basta tomarmos $\gamma = \left\{q_1' = \frac{1}{||q_1||}q_1, q_2' = \frac{1}{||q_2||}q_2\right\}$ para obter uma base ortonormal de $U \cap V$.

Processo de Gram-Schmidit:

- $q_1 = v_1 = (3,0,-1,-5)$;
- $q_2 = v_2 - \frac{<v_2,q_1>}{<q_1,q_1>}q_1 = (0,3,7,-2) - \frac{3\cdot 0+0\cdot 3-1\cdot 7+5\cdot 2}{9+0+1+25}(3,0,-1,-5) = \left(\frac{-9}{35}, 3, \frac{248}{35}, \frac{-55}{35}\right)$.

Agora basta tomar

$$\gamma = \left\{q_1' = \frac{1}{||q_1||}q_1, q_2' = \frac{1}{||q_2||}q_2\right\} = \left\{\left(\frac{3}{\sqrt{35}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{-5}{\sqrt{35}}\right), \left(\frac{-9}{\sqrt{75635}}, \frac{105}{\sqrt{75635}}, \frac{248}{\sqrt{75635}}, \frac{-55}{\sqrt{75635}}\right)\right\}.$$

b) Seja $v = (x,y,z,w) = \left(x, y, \frac{1}{3}x+\frac{7}{3}y, -\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}y.\right)$ as coordenadas de v na base γ são dadas pelos coeficientes de Fourier, ou seja, a i-ésima coordenada é:

$$\frac{< v, q_i' >}{< q_i', q_i' >} = < v, q_i' >, i \in \{1,2\}.$$

Assim, a primeira coordenada é dada por:

$$< v, q_1' >= \frac{3}{\sqrt{35}}x + 0\cdot y + \frac{-1}{\sqrt{35}}\left(\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}y\right) + \frac{-5}{\sqrt{35}}\left(-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}y\right)$$

e a segunda coordenada é dada por

$$< v, q_2' >= \frac{-9}{\sqrt{75635}}x + \frac{105}{\sqrt{75635}}y + \frac{248}{\sqrt{75635}}\left(\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}y\right) + \frac{-55}{\sqrt{75635}}\left(-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}y\right).$$

Questão bônus.(1.0) Para $c > 1$, $c \neq 1$, e pontos x, y distintos em $\mathbb{R}^k$, considere os pontos $z \in \mathbb{R}^k$ tais que

$$\|z - x\| = c\|z - y\|.$$

Mostre que estes pontos pertencem a uma esfera $\|z - z_0\| = r$ de centro z_0 e raio r. Encontre o centro z_0 e o raio r em termos de x, y e c. E se $c = 1$?

Resolução: Elevando a equação ao quadrado, temos

$$\|z - x\|^2 - c^2\|z - y\|^2 = 0 \Rightarrow \langle z - x, z - x\rangle - c^2 \langle z - y, z - y\rangle = 0.$$

Logo

$$\|z\|^2(1 - c^2) - 2\langle z, x\rangle + 2c^2 \langle z, y\rangle + \|x\|^2 - c^2\|y\|^2 = 0.$$

Dividindo a expressão acima por $c^2 - 1$ e lembrando que $c > 1$, temos

$$-\|z\|^2 - 2\frac{\langle z, x\rangle}{c^2 - 1} - 2\frac{\langle z, c^2 y\rangle}{c^2 - 1} = \frac{-\|x\|^2 + c^2\|y\|^2}{c^2 - 1}.$$

Temos assim

$$\left\langle z + \frac{x + c^2 y}{c^2 - 1}, z + \frac{x + c^2 y}{c^2 - 1}\right\rangle - \left\langle \frac{x + c^2 y}{c^2 - 1}, \frac{x + c^2 y}{c^2 - 1}\right\rangle = \frac{\|x\|^2 - c^2\|y\|^2}{c^2 - 1}.$$

Concluímos assim que

$$\left\| z + \frac{x + c^2 y}{c^2 - 1}\right\|^2 = \left[\left\|\frac{x + c^2 y}{c^2 - 1}\right\|^2 + \frac{(\|x\|^2 - c^2\|y\|^2)}{c^2 - 1}\right].$$

Portanto

$$z_0 = -\frac{1}{c^2 - 1}(x + c^2 y);$$

$$r_0 = \left[\left\|\frac{x + c^2 y}{c^2 - 1}\right\|^2 + \frac{(\|x\|^2 - c^2\|y\|^2)}{c^2 - 1}\right]^{1/2}.$$

Note que se $c = 1$, temos

$$\langle z, x - y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

Temos assim uma equação e k incógnitas, o que nos dá um hiperplano. **Boa Prova!**