Segunda Lista de Métodos 3 - 1° Semestre/2016 – Prof. João Paulo Pitelli

1^a **Questão.** Encontre a função de Green (quando existir) para os seguintes problemas de contorno:

a)
$$\begin{cases} x^2y'' + 2xy' = f(x) \ \ (0 < x \leq 1) \\ \lim\limits_{x\to 0} |y(x)| < \infty \\ y(1) = \alpha y'(1), \ \ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y'' + y = f(x) \ \ (0 \leq x \leq 1) \\ y(0) = y(1) \\ y'(0) = y'(1) \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y'' - y = f(x) \ \ (0 \leq x \leq 1) \\ y(0) = y'(0) \\ y(1) + \lambda y'(1) = 0, \ \ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} [(1-x^2)y']' = f(x) \ \ (0 < x < 1) \\ y(\pm 1) < \infty \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} y'' + k^2y = f(x) \ \ (0 < x < 1) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x^3y''' + 6x^2y''' + 6xy'' = f(x) \ \ (0 < x \leq 1) \\ \lim\limits_{x\to 0} |y(x)| < \infty \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

2^a **Questão.** A equação de movimento de um oscilador harmônico amortecido e forçado é dada por:

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{f(t)}{m},$$

onde m, λ, ω_0^2 e $f(t)$ representam, respectivamente, a massa, coeficiente de dissipação viscosa, frequência natural, e força externa.

a) Mostre que a função de Green do problema é

$$G(t,\tau) = \frac{1}{\omega} e^{-\lambda(t-\tau)} \sin\left[\omega(t-\tau)\right] H(t-\tau),$$

onde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$.

b) Usando o resultado do item anterior ache $x(t)$ quando a força externa é dada por

i)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t > \tau_0 \\ f_0 e^{-\alpha(t-\tau_0)}, & t \geq \tau_0 \end{cases}$$

ii)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t > \tau_0 \\ f_0 \cos(\omega t), & t \geq \tau_0 \end{cases}$$

3^a **Questão.** A equação que descreve a flexão $u(x)$ de uma viga elástica homogênea de comprimento L ao longo do eixo x é dada por

$$EIu_{xxxx} = f(x),$$

onde E é o módulo de Young e I o momento de inércia da seção reta da viga em relação ao eixo horizontal, e $f(x)$ é força de carregamento da viga por unidade de comprimento. Para uma viga simplesmente apoiada temos

$$u(0) = u(L) = 0$$
$$u_{xx}(0) = u_{xx}(L) = 0,$$

isto é, não há deflexão nas extremidades e o momento fletor é nulo.

a) Obtenha a função de Green para o problema da flexão da viga elástica no caso da viga simplesmente apoiada.

b) Resolva a equação não-homogênea no caso de um carregamento uniforme sobre a viga, $f(x) = f_0$, e mostre que (para $L = 1$)

$$u(x) = \frac{f_0}{24EI}(x^4 - 2x^3 + x),$$

de tal forma que a deflexão máxima da viga é dada por $5f_0/(384EI)$.

4^a **Questão.** Considere a equação diferencial $y'' - y = f(x)$ para $(-\infty < x < \infty)$ com as condições de contorno $y(\pm\infty) < \infty$.

a) Por construção direta mostre que a função de Green neste caso é dada por

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{2k} e^{-k|x-\xi|}.$$

b) Resolva a equação

$$G''(x,\xi) - k^2 G(x,\xi) = \delta(x-\xi)$$

pelo método da transformada de Fourier e mostre que

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik'x}e^{-ik'\xi}}{k'^2+k^2}dk'.$$

Resolva a integral e confirme o resultado com a letra a).

5^a **Questão.** Considere a equação diferencial $y'' - y = f(x)$ para $(0 \leq x < \infty)$ com as condições de contorno $y(0) = 0$ e $y(\infty) < \infty$.

a) introduza uma fonte em $x = \xi$ e uma imagem apropriada em $x = -\xi$ para mostrar que

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2k}e^{-k\xi}\sinh x \ \ (x < \xi) \\ -\dfrac{1}{2k}e^{-kx}\sinh \xi \ \ (x > \xi). \end{cases}$$

b) Confirme a resposta de a) através do método de Fourier em senos.

6^a **Questão.** Considere $u_H(x, t-\tau)$ a solução do seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \ \ (0 \leq x \leq \infty) \\ u(\infty,t) = 0 \\ u(0,t) = v(t) \\ u(x,0) = 0, \end{cases}$$

onde $v(t)$ é um pulso de altura v_0 de τ até $\tau + \Delta\tau$. Mostre, considerando N pulsos e fazendo $N \to \infty$, que a solução do do problema para $v(t)$ arbitrária é dada por

$$u(x,t) = \int_0^t -\frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial \tau} v(\tau)d\tau,$$

de tal forma que

$$G(x;t,\tau) = -\frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial \tau}.$$

7^a **Questão.** Resolva o problema de valor inicial na barra infinita com fonte de calor e condições iniciais especificadas:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + p(x,t) \ \ (-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

8^a **Questão.** Considere uma barra infinita com uma fonte de calor que atue somente dentro de um intervalo de largura 2Δ centrado na origem, e apenas apóss um instante de tempo t_0: $p(x,t) = P(x)H(t-t_0)$, onde:

$$P(x) = \begin{cases} p_0, & \text{se } -\Delta < x < \Delta \\ 0, & \text{se } |x| > \Delta \end{cases},$$

a) Mostre que a temperatura da barra é dada por

$$u(x,t) = \frac{p_0}{2}\int_{t_0}^{t} d\tau \left[\mathrm{erf}\left(\frac{x+\Delta}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{x-\Delta}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\right].$$

b) Verifique que a solução acima satisfaz as condições iniciais e de contorno.

c) Supondo que o argumento das funções erro seja pequeno, obtenha a expressão aproximada

$$u(x,t) \approx \frac{2p_0\Delta}{a\sqrt{\pi}\sqrt{t-t0}}.$$

d) Mostre que o fluxo de calor é dado por:

$$q(x,t) = \frac{\kappa p_0}{2a^2\sqrt{\pi}}\left\{(x-\Delta)\left[\sqrt{\pi}(\mathrm{erf}(z_{20})-1) + \frac{e^{-z_{20}^2}}{z_{20}}\right] + (x+\Delta)\left[\sqrt{\pi}(\mathrm{erf}(z_{10})-1) + \frac{e^{-z_{10}^2}}{z_{10}}\right]\right\},$$

onde

$$z_{i0} \equiv \frac{x\pm\Delta}{\sqrt{4a^2(t-t_0)}}, \quad i = 1,2.$$

9^a **Questão.** Seja um anel de raio R e carga total Q distriuida uniformemente sobre sua extensão. Encontre o potencial gerado por esse anel.

10^a **Questão.** A equação de Helmholtz é um caso particular da seguinte equação diferencial

$$\nabla\cdot[p(\vec{r})\nabla u(\vec{r})] - s(\vec{r})u(\vec{r}) = -f(\vec{r})$$

a) Mostre que $G(\vec{r},\vec{r'}) = G(\vec{r'},\vec{r})$.

b) Mostre que a solução formal para condições de contorno de Dirichlet numa superfície S é

$$u(\vec{r}) = \int_V d^3r' G(\vec{r},\vec{r'})f(\vec{r}) - \int\int_S p(\vec{r'})u(\vec{r'})\nabla' G(\vec{r},\vec{r'})\cdot dS$$