Terceira Lista de Métodos 3 - 1° Semestre/2016 – Prof. João Paulo Pitelli

1^a **Questão.** Se $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência em um espaço com produto interno X tal que a série $||x_1|| + ||x_2|| + \cdots$ converge, mostre que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy, onde $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

2^a **Questão.** Mostre que em um espaço de Hilbert H, convergência de $\Sigma||x_j||$ implica convergência de Σx_j.

3^a **Questão.** A partir da identidade de Parseval, derive a seguinte expressão

$$\langle x, y\rangle = \Sigma\langle x, e_k\rangle \langle y, e_k\rangle^*$$

Dica: Use a identidade de polarização:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle &= \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right) \\ \mathrm{Im}\,\langle x, y\rangle &= \frac{1}{4}\left(||x-iy||^2 - ||x+iy||^2\right). \end{aligned}$$

4^a **Questão.** Mostre que o operador integral $T : C[0,1] \to C[0,1]$ definido por

$$y = Tx, \;\text{ onde, }\; y(t) = \int_0^1 K(x,\tau)x(\tau)d\tau$$

é linear e limitado.

5^a **Questão.**

a) Obtenha uma equação integral de Volterra partindo da equação

$$y''(x) - y'(x) = 0, \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1.$$

b) Derive a equação de Fredholm correspondente à equação

$$y''(x) - y'(x) = 0, \;\; y(1) = 1, \;\; y'(-1) = 1.$$

6^a **Questão.** Mostre que a equação de Volterra homogênea de segunda espécie

$$\psi(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)\psi(t)dt$$

não tem solução que não a trivial $\psi(x) = 0$.

Dica: Considere a espansão em Maclaurin de $\psi(x)$.

7^a **Questão.** Através do método da transformada de Laplace, resolva

a) $\varphi(x) = x + \int_0^x (t-x)\varphi(t)dt$,

b) $\varphi(x) = x - \int_0^x (t-x)\varphi(t)dt$.

8^a **Questão.** Resolva

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (t+x)\varphi(t)dt.$$

9^a **Questão.** Encontre os autovalores e as autofunções de

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(x-t)\varphi(t)dt.$$

10^a **Questão.** Resolva

$$\varphi(x) = 1 + \lambda^2 \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt$$

por cada um dos três métodos:

a) Redução à uma EDO.

b) Séries de Neumann.

c) Método da transformada de Laplace.

11^a **Questão.** Na equação de Fredholm

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \tag{1}$$

o núcleo $K(x,t)$ é Hermitiano se $K(x,t) = K^*(t,x)$.

Mostre que

a) As autofunções são ortogonais no sentido

$$\int_a^b \varphi_m^*(x)\varphi_n(x) = 0, \ , \ m \neq n \ (\lambda_m \neq \lambda_n).$$

b) Os autovalores são reais.

12^a **Questão.** A equação integral $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (1+xt)\varphi(t)dt$ tem autovalores $\lambda_1 = 0.7889$ e $\lambda_2 = 15.211$ e autofunções $\varphi_1(x) = 1 + 0.5352x$ e $\varphi_2(x) = 1 - 1.8685x$.

a) Mostre que as autofunções são ortogonais no intervalo $[0,1]$.

b) Normalize as autofunções.

c) Mostre que

$$K(x,t) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(t)}{\lambda_2}.$$