Primeira Lista de Métodos 3 - 1° Semestre/2016 – Prof. João Paulo Pitelli

1^a **Questão.** Mostre que as sequências abaixo são sequências delta:

a) $\delta_n(x) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}$,

b) $\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}$.

2^a **Questão.** Estabeleça o seguinte limite (no sentido distribucional):

$$\lim_{t\to 0^\pm} \ln(\tau + it) = \ln|\tau| + i\pi H(-\tau),$$

onde estamos tomando o ramo principal do logaritmo, ou seja, $|\arg(\tau + it)| < \pi$ e $H(\tau)$ é a distribuição de Heaviside. Relacione essa expressão com a fórmula de Plemelj-Sochozki.

3^a **Questão.** Mostre que para $t \to \infty$

a) $\frac{e^{ixt}}{x-i0} \to 2\pi i\delta(x)$,

b) $\frac{e^{-ixt}}{x+i0} \to -2\pi i\delta(x)$.

4^a **Questão.** Sejam y e τ números reais com $\tau > 0$ e $y \neq 0$. Mostre que

$$\delta\left(e^{yt} - \tau\right) = \frac{1}{|y|\tau}\delta\left(t - y^{-1}\ln\tau\right).$$

5^a **Questão.** Mostre que

$$\delta\left(f(x)\right) = \sum_i \frac{\delta\left(x - x_i\right)}{|f'(x_i)|},$$

onde x_i são os zeros de $f(x)$ no intervalo onde essa função está bem definida.

6^a **Questão.** Calcule

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x^2 - 5x + 6\right)\left(3x^2 - 7x + 2\right)dx$,

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x^2 - \pi^2\right)\cos x dx$.

7^a **Questão.** Para $f(x) \in C^\infty$, mostre que

$$f(x)\delta'(x) = -f'(0)\delta(x) + f(0)\delta'(x).$$

8^a **Questão.** Mostre que

a) $\delta'(x^3+3x) = \frac{1}{9}\delta'(x)$,

b) $\delta^{(k)}(ax+b) = \frac{1}{a^k|a|}\delta^{(k)}(x+b/a)$.

9^a **Questão.** Mostre que

$$y(x) = c_1 + c_2 H(x) + \ln|x|,$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, satisfaz a equação

$$xy' = 1.$$

10^a **Questão.** Mostre que

$$E(x,t) = \frac{H(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

satisfarz a equação

$$E_t - E_{xx} = \delta(x)\delta(t).$$

11^a **Questão.** Calcule as seguintes transformadas de Fourier:

a) $\mathcal{F}\left[xH(x)\right] = -i\pi\delta'(k) - \mathrm{Pf}\frac{1}{k^2}$,

b) $\mathcal{F}\left[\mathrm{sgn}(x)\right] = 2i\mathrm{Pv}\frac{1}{k}$,

c) $\mathcal{F}\left[\mathrm{Pv}\frac{1}{x}\right] = i\pi\mathrm{sgn}(k)$,

d) $\mathcal{F}\left[|x|\right] = -2\mathrm{Pf}\frac{1}{k^2}$,

e) $\mathcal{F}\left[\mathrm{Pf}\frac{1}{x^2}\right] = \pi|k|$,

onde

$$\mathrm{Pf}\frac{1}{x^2} = \mathrm{Pf}\frac{H(x)}{x^2} + \mathrm{Pf}\frac{H(-x)}{x^2}.$$

12^a **Questão.** Mostre que:

a) $(f(x)H(x)) * (g(x)H(x)) = H(x)\int_0^x f(\xi)g(x-\xi)d\xi$,

b) $(xH(x)) * (e^x H(x)) = (e^x - x - 1)H(x)$,

c) $(\sin xH(x)) * (\cos xH(x)) = \frac{1}{2}x\sin xH(x)$,

d) $H(x) * \mathrm{Pf}\frac{H(x)}{x} = \ln xH(x)$,

e) $\delta'(x) * \mathrm{Pv}\frac{1}{x} = -\mathrm{Pf}\frac{H(-x)}{x^2} - \mathrm{Pf}\frac{H(x)}{x^2}$,

f) Seja $f_\alpha(x)$ dada por

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}, \ \ (\alpha > 0).$$

Mostre que $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.