Quarta Lista de Métodos 3 - 1° Semestre/2016 – Prof. João Paulo Pitelli

1^a **Questão.** Mostre que se $v^\mu \partial_\mu = 0$, isto é, $v^\mu \partial_\mu f = 0$ para todo $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $v^\mu = 0$ para todo μ.

2^a **Questão.** Verifique que $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ utilizando as definições.

3^a **Questão.** Considere os vetores normalizados

$$v = \frac{x\partial_x + y\partial_y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$w = \frac{x\partial_y - y\partial_x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Calcule $[v, w]$.

4^a **Questão.** Seja $f(x^1, \ldots, x^n)$ é uma função de $\mathbb{R}^n$. Mostre que

$$df = \partial_\mu f dx^\mu.$$

5^a **Questão.** Mostre que as 1-formas são L.I., isto é, se

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = 0,$$

então todas as funções ω_μ são nulas.

6^a **Questão.** Seja

$$e_\mu = T^\nu_\mu \partial_\nu,$$

onde ∂_ν são os campos vetoriais coordenados associados a coordenadas locais em um conjunto aberto U e T^ν_μ são funções em U. Mostre que os campos vetoriais e_μ formam uma base de campos vetoriais em U se, e somente se, para cada $p \in U$ a matriz $T^\nu_\mu(p)$ é invertível.

7^a **Questão.** Use o exercício anterior para mostrar que a base dual existe e é única.

8^a **Questão.** Seja e_μ base de campos vetoriais em U e seja f^μ a base dual das 1-formas. Seja

$$e'_\mu = T^\nu_\mu e_\nu$$

uma outra base de campos vetoriais e f'^μ a base dual correspondente das 1-formas. Mostre que

$$f'_\mu = (T^{-1})^\mu_\nu f^\nu.$$

Mostre que se $v = v^\mu e_\mu = v'^\mu e'_\mu$, então

$$v'^\mu = (T^{-1})^\mu_\nu v^\nu,$$

e se $\omega = \omega_\mu f^\mu = \omega'_\mu f'^\mu$ então

$$\omega'_\mu = (T^1)^\nu_\mu \omega_\nu.$$

9^a **Questão.** Seja V espaço vetorial de dimensão n. Mostre $\Lambda^p V$ é vazio se $p > n$ e que a dimensão de $\Lambda^p V$ é $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ se $0 \leq p \leq n$.

10^a **Questão.** Mostre que em $\mathbb{R}^n$ a derivada exterior de qualquer 1-forma é dada por

$$d(\omega_\mu dx^\mu) = \partial_\nu \omega_\mu dx^\nu dx^{\mu.}$$

11^a **Questão.** Mostre que qualquer 2-forma F em $\mathbb{R} \times S$ pode ser unicamente expressa como $B + E \wedge dt$ de tal maneira que para qualquer coordenada local x^i em S temos $E = E_i dx^i$ e $B = \frac{1}{2} B_{ij} dx^i \wedge dx^j$.