# MA211 - Lista 05

## Valores Máximos e Mínimos e Multiplicadores de Lagrange

18 de setembro de 2016

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. ★ ([1], seção 14.7) Nos itens abaixo, determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função.

   **a)** $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$

   **b)** $f(x,y) = y\cos x$

   **Solução:**

   **a)** Sendo $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$, vamos inicialmente localizar seus pontos críticos:

   $$f_x(x,y) = 3x^2 - 12y \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = -12x + 24y^2.$$

   Igualando essas derivadas parciais a zero, obtemos as equações

   $$x^2 - 4y = 0 \qquad \text{e} \qquad 2y^2 - x = 0.$$

   Para resolvê-las, substituímos $x = 2y^2$ da segunda equação na primeira. Isso resulta em

   $$0 = y^4 - y = y(y^3 - 1)$$

   e existem duas raízes reais $y = 0$ e $y = 1$. Os dois pontos críticos de $f$ são $(0,0)$ e $(2,1)$.
   Agora vamos calcular as segundas derivadas parciais e $D(x,y)$:

   $$f_{xx}(x,y) = 6x \quad f_{xy}(x,y) = -12 \quad f_{yy}(x,y) = 48y$$

   $$\begin{aligned} D(x,y) &= f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 \\ &= (6x)\cdot(48y) - (-12)^2 = 288xy - 144. \end{aligned}$$

   Como $D(0,0) = -144 < 0$, segue do Teste da Derivada Segunda que $(0,0)$ é um ponto de sela, ou seja, $f$ não tem nem máximo local nem mínimo local em $(0,0)$. Como $D(2,1) = 432 > 0$ e $f_{xx}(2,1) = 12 > 0$, vemos do Teste da Derivada Segunda que $f(2,1) = -8$ é um mínimo local.

   **b)** Sendo $f(x,y) = y\,\cos x$, vamos inicialmente localizar seus pontos críticos:

   $$f_x(x,y) = -y\,\operatorname{sen} x \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = \cos x.$$

   Igualando essas derivadas parciais a zero, obtemos as equações

   $$y\,\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{e} \qquad \cos x = 0.$$

   Da segunda equação obtemos que $x = \left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. Da primeira equação temos que $y = 0$ para todos essas $x$-valores. Assim, os pontos críticos são $\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$. Agora,

   $$f_{xx}(x,y) = -y\,\cos x, \qquad f_{xy}(x,y) = -\operatorname{sen} x \qquad \text{e} \qquad f_{yy}(x,y) = 0.$$

Então

$$\begin{aligned} D(x,y) &= (f_{xx}(x,y)) \cdot (f_{yy}(x,y)) - (f_{xy}(x,y))^2 \\ &\Rightarrow D\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right) = 0 - \operatorname{sen}^2 x = -\operatorname{sen}^2 x < 0. \end{aligned}$$

Portanto, cada ponto crítico é ponto de sela.

2. ♦ ([1], seção 14.7) Determine o volume máximo da maior caixa retangular no primeiro octante com três faces nos planos coordenados e com um vértice no plano
$x + 2y + 3z = 6$.

**Solução:** Vamos maximizar a função

$$f(x,y) = x \cdot y \cdot \left(\frac{6 - x - 2y}{3}\right) = \frac{6xy - x^2y - 2xy^2}{3},$$

então o volume máximo é $V = x \cdot y \cdot z$. Para encontrar os pontos críticos devemos encontrar as derivadas parciais $f_x$ e $f_y$. Assim,

$$f_x(x,y) = \frac{6y - 2xy - 2y^2}{3} \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = \frac{6x - x^2 - 4xy}{3}.$$

Fazendo $f_x = 0$ e $f_y = 0$, obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 6y - 2xy - 2y^2 = 0 \\ 6x - x^2 - 4xy = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação obtemos

$$y = 0 \qquad \text{ou} \qquad y = 3 - x.$$

Como, $y = 0$ não satifaz as condicões, vamos analisar o caso onde $y = 3 - x$. Substituindo esse valor na segunda equação obtemos

$$x = 0 \qquad \text{ou} \qquad 3x^2 - 6x = 0.$$

Novamente, como $x = 0$ não satisfaz as condições, vamos analisar o caso onde $3x^2 - 6 = 0$. Logo, obtemos

$$x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x = 2.$$

Novamente, $x = 0$ não nos interessa. Assim, sendo $x = 2$ obtemos que $y = 1$ e $z = \dfrac{2}{3}$. Portanto, o volume máximo da maior caixa, nas condições do exercício, será

$$V = (2) \cdot (1) \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

3. ⧫ ([1], seção 14.8) Use multiplicadores de Lagrange para demonstrar que o triângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante $p$, é equilátero. (*Sugestão*: Utilize a fórmula de Heron para a área:

$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)},$$

em que $s = p/2$ e $x, y$ e $z$ são os comprimentos dos lados.)

**Solução:** Utilizando a fórmula de Heros temos que a área e um triânulo é

$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)},$$

com $s = p/2$ e $x$, $y$, $z$ lados do triângulo. Mas a álgebra fica mais simples se maximizarmos o quadrado da área, isto é,

$$A^2 = f(x, y, z) = s(s-x)(s-y)(s-z).$$

A restrição é que o triângulo têm perímetro constante $p$, ou seja,

$$g(x, y, z) = x + y + z = p.$$

De acordo com o método dos multiplicadores de Lagrange, resolvemos $\nabla f = \lambda \nabla g$ e $g = p$. Então

$$\nabla f(x, y, z) = (\, -s(s-y)(s-z),\ -s(s-x)(s-z),\ -s(s-x)(s-y)\,)$$

e

$$\lambda \nabla g(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1) = (\lambda, \lambda, \lambda).$$

Logo temos as seguintes equações

$$\begin{array}{rcl} -s(s-y)(s-z) & = & \lambda \\ -s(s-x)(s-z) & = & \lambda \\ -s(s-x)(s-y) & = & \lambda \\ x+y+z & = & p \end{array}$$

Assim, das três primeiras equações, temos que

$$-s(s-y)(s-z) = -s(s-x)(s-z) = -s(s-x)(s-y).$$

Da primeira igualdade obtemos que $s - y = s - x \Rightarrow y = x$ e da segunda igualdade obtemos que $s - z = s - y \Rightarrow z = y$, resultando que $x = y = z$. Portanto, o triângulo com área máxima e perímetro constante $p$ é um triângulo equilátero.

4. ♦ (Prova, 2014) Encontre os pontos da elipse $x^2+xy+y^2=3$ mais próximos e mais distantes da origem.

**Solução:** A distância entre um ponto $(x,y)$ e a origem $(0,0)$ é

$$d=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Mas a álgebra fica mais simples se maximizarmos e minimizarmos o quadrado da distância:

$$d^2=f(x,y)=x^2+y^2.$$

A restrição é que os pontos pertencem a elipse, ou seja,

$$g(x,y)=x^2+xy+y^2=3$$

De acordo com os multiplicadores de Lagrange, resolvemos $\nabla f=\lambda\nabla g$ e $g=3$. Então

$$\nabla f(x,y)=(2x,2y)$$

e

$$\lambda\nabla g(x,y)=\lambda(2x+y,x+2y)=(2x\lambda+y\lambda,2y\lambda+x\lambda).$$

Logo temos,

$$\begin{aligned} 2x&=2x\lambda+y\lambda && (1)\\ 2y&=2y\lambda+x\lambda && (2)\\ x^2+xy+y^2&=3 && (3)\end{aligned}$$

Se $\lambda=0$ teremos que $x=0$ e $y=0$, mas esses valores não satisfazem equação (3). Logo $\lambda\neq 0$ e multiplicando ambos os lados da equação (1) por $\dfrac{y}{\lambda}$ e ambos os lados da equação (2) por $\dfrac{x}{\lambda}$, obtemos que

$$\frac{2xy}{y}=2xy+y^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{2xy}{y}=2xy+x^2.$$

Logo,

$$y^2=x^2\Rightarrow y=x \quad \text{ou} \quad y=-x.$$

Se $y=x$ temos que da equação (3) que $x^2+x^2+x^2=3\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1$. Logo temos os pontos $(1,1)$ e $(-1,-1)$.
Se $y=-x$ temos que da equação (3) que $x^2-x^2+x^2=3\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$. Logo temos os pontos $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.
Os valores de $f$ nesses pontos são:

$$f(1,1)=f(-1,-1)=2 \qquad \text{e} \qquad f(\sqrt{3},-\sqrt{3})=f(-\sqrt{3},\sqrt{3})=6.$$

Portanto, $(1,1)$ e $(-1,-1)$ são os pontos mais próximos e $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ os pontos mais afastados da origem $(0,0)$.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. ([1], seção 14.7) Suponha que $(0,2)$ seja um ponto crítico de uma função $g$ com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre $g$?

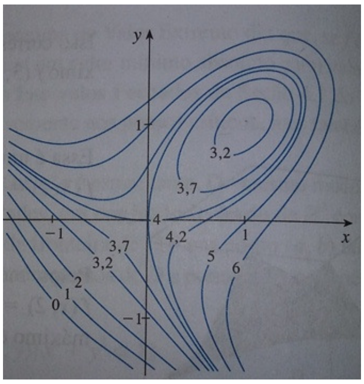
   **a)** $g_{xx}(0,2) = -1, \quad g_{xy}(0,2) = 6, \quad g_{yy}(0,2) = 1.$

   **b)** $g_{xx}(0,2) = -1, \quad g_{xy}(0,2) = 2, \quad g_{yy}(0,2) = -8.$

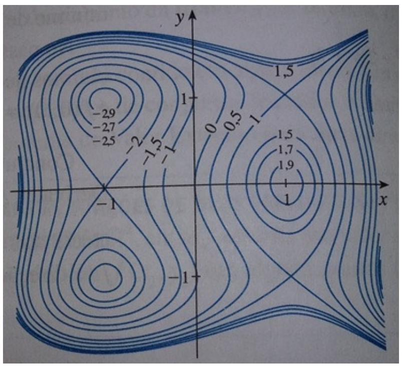
   **c)** $g_{xx}(0,2) = 4, \quad g_{xy}(0,2) = 6, \quad g_{yy}(0,2) = 9.$

6. ([1], seção 14.7) Nos itens abaixo. Utilize as curvas de nível da figura para predizer a localização dos pontos críticos de $f$ e se $f$ tem um ponto de sela ou um máximo ou mínimo local em cada um desses pontos. Explique seu raciocínio. Em seguida, empregue o Teste da Segunda Derivada para confirmar suas predições.

   **a)** $f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$




   **b)** $f(x,y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



7. ♦ ([1], seção 14.7),([2], seção 16.3),(Provas, 2007, 2014) Nos itens abaixo, determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função.

**a)** $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$
**b)** $f(x,y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$
**c)** $f(x,y) = e^{4y-x^2-y^2}$
**d)** $f(x,y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x$
**e)** $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$
**f)** $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 27y$
**g)** $f(x,y) = xy - 2x - y$
**h)** $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$
**i)** $f(x,y) = e^x \cos y$
**j)** $f(x,y) = x^4 + xy + y^2 - 6x - 5y$
**l)** $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{y^2-x^2}$
**m)** $f(x,y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$
**n)** $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$
**o)** $f(x,y) = x^2 + y^3 + xy - 3x - 4y + 5$
**p)** $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4x + 4y$
**q)** $f(x,y) = -x^2 + y^2 + 2xy + 4x - 2y$
**r)** $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$
**s)** $f(x,y) = x^2 - 4xy + 4y^2 - x + 3y + 1$
**t)** $f(x,y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5$
**u)** $f(x,y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} + xy$, $x > 0$ e $y > 0$
**v)** $f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$
**w)** $f(x,y) = xy + 2x - \ln(x^2y)$

8. ([1], seção 14.7) Mostre que $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$ tem um número infinito de pontos críticos e que $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0$ em cada um. A seguir, mostre que $f$ tem um mínimo local (e absoluto) em cada ponto crítico.

9. ♦ ([1], seção 14.7),([2], seção 16.4),(Prova, 2006) Nos itens abaixo, determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f$ no conjunto $D$.

**a)** ★ $f(x,y) = 3 + xy - x - 2y$, $D$ é a região triangular fechada com vértices $(1,0)$, $(5,0)$ e $(1,4)$.

**b)** $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$.

**c)** $f(x,y) = xy^2$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 3\}$.

**d)** $f(x,y) = 2x^3 + y^4$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

**e)** $f(x,y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$, $D$ é o quadrilátero cujos vértices são $(-2,3)$, $(2,3)$, $(2,2)$ e $(-2,-2)$.

**f)** $f(x,y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$, $D$ é a região do plano $xy$ dada por $0 \leq y \leq 2(2x - x^2)$.

**g)** $f(x,y) = 3x - y$ no conjunto $D$ de todas $(x,y)$ tais que $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y - x \leq 3$, $x + y \leq 4$ e $3x + y \leq 6$.

**h)** $f(x,y) = 3x - y$ em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

**i)** $f(x,y) = x^2 + 3xy - 3x$ em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ e } x + y \leq 1\}$.

**j)** $f(x,y) = xy$ em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ e } 2x + y \leq 5\}$.

**l)** $f(x,y) = y^2 - x^2$ em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

**m)** $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| + |y| \leq 1\}$.

10. ([1], seção 14.7) Determine a menor distância entre o ponto $(2,1,-1)$ e o plano $x + y - z = 1$.

11. ([2], seção 16.4) Determine $(x,y)$, com $x^2 + 4y^2 \leq 1$, que maximiza a soma $2x + y$.

12. ♦ ([2], seção 16.4) Suponha que $T(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano. Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq x \text{ e } 2y + x \leq 4\}$. Determine o ponto de $D$ de menor temperatura.

13. ♦ ([2], seção 16.4) Determine o valor máximo de $f(x,y) = x + 5y$, onde $x$ e $y$ estão sujeitos às restrições: $5x + 6y \leq 30$, $3x + 2y \leq 12$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

14. ★ ([1], seção 14.7) Determine os pontos do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que estão mais próximos do ponto $(4, 2, 0)$.

15. ([1], seção 14.7) Determine os pontos da superfície $y^2 = 9 + xz$ que estão mais próximos da origem.

16. ([1], seção 14.7) Determine três números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

17. ([1], seção 14.7) Encontre o volume máximo de uma caixa retangular que está inscrita em uma esfera de raio $r$.

18. ([1], seção 14.7) Determine as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo tal que a soma dos comprimentos de suas 12 arestas seja uma constante $c$.

19. ([1], seção 14.7) Uma caixa de papelão sem tampa deve ter um volume de $32000\ cm^3$. Determine as dimensões que minimizem a quantidade de papelão utilizado.

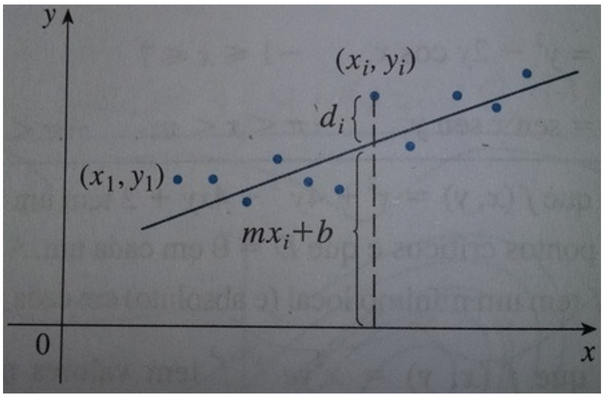
20. ([1], seção 14.7) Três alelos (versões alternativas de um gene) $A$, $B$ e $O$ determinam os quatro tipos de sangue: $A$ ($AA$ ou $AO$), $B$ ($BB$ ou $BO$), $O$ ($OO$) e $AB$. A Lei de Hardy-Weinberg afirma que a proporção de indivíduos em uma população que carregam dois alelos diferentes é $P = 2pq + 2pr + 2rq$, onde $p$, $q$ e $r$ são as proporções de $A$, $B$ e $O$ na população. Use o fato de que $p + q + r = 1$ para mostrar que $P$ é no máximo $\dfrac{2}{3}$.

21. ([1], seção 14.7) Suponha que um cientista tenha razões para acreditar que duas quantidades $x$ e $y$ estejam relacionadas linearmente, ou seja, $y = mx + b$, pelo menos aproximadamente, para algum valor de $m$ e de $b$. O cientista realiza uma experiência e coleta os dados na forma de pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, e então coloca-os em um gráfico. Os pontos não estão todos alinhados, de modo que o cientista quer determinar as constantes $m$ e $b$ para que a reta $y = mx + b$ "ajuste"os pontos tanto quanto possível (veja a figura). Seja $d_i = y_i - (mx_i + b)$ o desvio vertical do ponto $(x_i, y_i)$ da reta. O **método dos mínimos quadrados** determina $m$ e $b$ de modo a minimizar $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$, a soma dos quadrados dos desvios. Mostre que, de acordo com esse método, a reta de melhor ajuste é obtida quando

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Assim, a reta é determinada resolvendo esse sistema linear de duas equações nas incógnitas $m$ e $b$.




22. ([3], seção 11.7) Mostre que $(0,0)$ é um ponto crítico de $f(x,y) = x^2+kxy+y^2$, não importando o valor da constante $k$.

23. ([3], seção 11.7) Entre todos os pontos do gráfico de $z = 10 - x^2 - y^2$ que estão acima do plano $x + 2y + 3z = 0$, encontre o ponto mais afastado do plano.

24. ([3], seção 11.7) Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy - x - y + 1$ no quadrado $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.

    **a)** Mostre que $f$ tem um mínimo absoluto ao longo do segmento de reta $2x + 2y = 1$ nesse quadrado. Qual é o valor mínimo absoluto?

    **b)** Encontre o valor máximo absoluto de $f$ no quadrado.

25. ([5], seção 16.8) Determine a menor distância entre os planos paralelos $2x + 3y - z = 2$ e $2x + 3y - z = 4$.

26. ([5], seção 16.8) Determine os pontos do gráfico de $xy^3z^2 = 16$ mais próximos da origem.

27. ([5], seção 16.8) Determine as dimensões da caixa retangular de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, que possa ser inscrita no elipsóide $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$.

28. (Prova, 2008) Seja

$$f(x,y) = k(x-y)^2 + \frac{y^4}{2} - \frac{y^2}{2}, \quad k \neq 0.$$

    **a)** Encontre os pontos críticos da função $f$.

    **b)** Classifique os pontos críticos da função $f$ no caso em que $k > 0$.

29. (Prova, 2010)

**a)** Determine os pontos críticos da função

$$f(x,y) = -(x^2-1)^2 - (x^2y - x - 1)^2.$$

**b)** Calcule os valores assumidos por $f$ nos pontos críticos. É possível classificar os pontos críticos sem utilizar o críterio da derivada segunda? Se for possível, classifique-os e justifique a resposta.

30. (Prova, 2010) Considere a função

$$f(x,y) = -\frac{y^2}{2} + 3x^2 - 2x^3.$$

**a)** Determine e classifique os pontos críticos de $f$.

**b)** Mostre que a curva de nível $f(x,y) = 0$ com $x \geq 0$ é uma curva fechada, isto é, é a fronteira de uma região $R$ limitada do plano $xy$. Calcule o valor máximo de $f$ nessa região $R$.

31. ♦ ([2], seção 16.5) Estude com relação a máximos e mínimos a função dada com as restrições dadas.

**a)** $f(x,y) = 3x + y$ e $x^2 + 2y^2 = 1$.

**b)** ★ $f(x,y) = 3x + y$ e $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

**c)** $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ e $3x + y = 1$.

**d)** $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ e $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$.

**e)** $f(x,y) = xy$ e $x^2 + 4y^2 = 8$.

**f)** $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ e $x + 2y - 1 = 0$.

**g)** $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ e $x^2 + y^2 = 1$.

**h)** $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ e $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

**i)** $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ e $x + 2y = 3$.

**j)** $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ e $x^2 + 2y^2 = 1$.

32. ♦ ([1], seção 14.8) Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

**a)** $f(x,y) = x^2 + y^2$; $\quad xy = 1$.

**b)** $f(x,y) = 4x + 6y$; $\quad x^2 + y^2 = 13$.

**c)** $f(x,y) = x^2y$; $\quad x^2 + 2y^2 = 6$.

**d)** $f(x,y,z) = 2x + 6y + 10z$; $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 35$.

**e)** $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$; $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

**f)** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$; $\quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

**g)** $f(x,y,z) = yz + xy$; $\quad xy = 1, \quad y^2 + z^2 = 1$.

33. ([3], seção 11.8) Embora $\nabla f = \lambda \nabla g$ seja uma condição necessária para a ocorrência de um valor extremo de $f(x, y)$ sujeito à restrição $g(x, y) = 0$, ela não garante por si só que ele exista. Como um exemplo, tente usar o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar um valor máximo de $f(x, y) = x + y$ sujeito à restrição $xy = 16$. O método identificará os dois pontos $(4, 4)$ e $(-4, -4)$ como candidatos para a localização dos valores extremos. Ainda assim, a soma $x + y$ não tem valor máximo sobre a hipérbole. Quanto mais distante você está da origem nessa hipérbole no primeiro quadrante, maior se torna a soma $f(x, y) = x + y$.

34. ([1], seção 14.8) Determine os valores extremos de $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$ na região descrita por $x^2 + y^2 \leq 16$.

35. ([1], seção 14.8) A produção total $P$ de certo produto depende da quantidade $L$ de trabalho empregado e da quantidade $K$ de capital investido. Nas Seções 14.1 e 14.3 de [1], foi discutido o modelo Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ seguido de certas hipóteses econômicas, em que $b$ e $\alpha$ são constantes positivas e $\alpha < 1$. Se o custo por unidade de trabalho for $m$ e o custo por unidade de capital for $n$, e uma companhia puder gastar somente uma quantidade $p$ de dinheiro como despesa total, então a maximização da produção $P$ estará sujeita à restrição $mL + nK = p$. Mostre que a produção máxima ocorre quando

$$L = \frac{\alpha p}{m} \quad \text{e} \quad K = \frac{(1-\alpha)p}{n}.$$

36. ([3], seção 11.8)

    **a)** Mostre que o valor máximo de $a^2b^2c^2$ sobre uma esfera de raio $r$ centrada na origem de um sistema de coordenadas cartesianas $(a, b, c)$ é $(r^2/3)^3$.

    **b)** Usando o item **(a)**, mostre que, para números não negativos $a$, $b$ e $c$,

    $$(abc)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3},$$

    isto é, a *média geométrica* de três números não negativos é menor que ou igual à *média aritmética*.

37. ([1], seção 14.8) O plano $x + y + 2z = 2$ intercepta o paraboloide $z = x^2 + y^2$ em uma elipse. Determine os pontos dessa elipse que estão mais próximo e mais longe da origem.

38. ♦ ([1], seção 14.8) O plano $4x - 3y + 8z = 5$ intercepta o cone $z^2 = x^2 + y^2$ em uma elipse.

    **a)** Faça os gráficos do cone, do plano e da elipse.

    **b)** Use os multiplicadores de Lagrange para achar os pontos mais alto e mais baixo da elipse.

39. ([2], seção 16.5) Determine a curva de nível de $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ que seja tangente à curva $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$. Qual o ponto de tangência?

40. ([2], seção 16.5) Determine o ponto da reta $x + 2y = 1$ cujo produto das coordenadas seja máximo.

41. ([2], seção 16.5) Determine o ponto da parábola $y = x^2$ mais próximo de $(14, 1)$.

42. ([2], seção 16.5) Determine o ponto do elipsóide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ que maximiza a soma $x + 2y + z$.

43. ([2], seção 16.5) Encontre o ponto da curva $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ mais próximo da origem.

44. ([2], seção 16.5) Encontre os pontos da curva $x^2 - 6xy - 7y^2 + 80 = 0$ mais próximos da origem. Desenhe a curva.

45. ([2], seção 16.5) Determine o plano tangente à superfície $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$, com $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$, que forma com os planos coordenados um tetraedro de volume mínimo. (Dica: O volume do tetraedro formado pelos planos coordenados e o plano $ax + by + cz = d$ no primeiro octante é dado por $V = d^3/(6abc)$.)

46. ♦ (Prova, 2014) Determine os pontos da elipse $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1\right\}$ que fornecem o maior e o menor valor da função $f(x, y) = xy$.

47. (Prova, 2013) Determine o valor máximo de $f(x, y, z) = 6x + z$ sobre a curva de interseção das superfícies $x^2 + y^2 = 4$ e $z = x^2 - 2y^2$.

48. (Prova, 2013) Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar o ponto sobre a parábola $y = x^2$ que se encontra mais próximo do ponto $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$.

49. (Prova, 2010) Determine os valores de máximo e mínimo de $f(x, y, z) = x^2 - yz$ em pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

50. (Prova, 2014) Determine os valores máximo e mínimo absolutos de

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$$

no conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

51. (Prova, 2007) Determine os pontos da superfície $xyz = 1$ que estão mais próximos da origem.

## RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. **a)** $g$ possui um ponto de sela em $(0,2)$.

   **b)** $g$ possui um ponto de máximo local em $(0,2)$.

   **c)** Não se pode afirmar algo sobre $g$ pelo Teste da Segunda Derivada.

6. **a)** $f$ possui um ponto de sela em $(0,0)$ e um mínimo local em $(1,1)$.

   **b)** $f$ possui um ponto de máximo local em $(1,0)$, pontos de sela em $(1,1)$, $(1,-1)$ e $(-1,0)$ e pontos de mínimo local em $(-1,1)$ e $(-1,-1)$.

7. **a)** Ponto de máximo: $\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

   **b)** Ponto de mínimo: $\left(\dfrac{54}{7},-\dfrac{22}{7}\right)$.

   **c)** Ponto de máximo: $(0,2)$.

   **d)** Ponto de mínimo: $\left(\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{3}\right)$; ponto de sela: $(-1,1)$.

   **e)** Pontos de mínimo: $(1,1)$ e $(-1,-1)$; ponto de sela: $(0,0)$.

   **f)** Pontos de sela: $\left(3,\dfrac{3}{2}\right)$ e $\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$.

   **g)** Ponto de mínimo: $(2,1)$; ponto de sela: $(0,0)$.

   **h)** Ponto de mínimo: $(2,1)$.

   **i)** Não há pontos críticos.

   **j)** Ponto de mínimo: $(1,2)$.

   **l)** Ponto de mínimo: $(0,0)$; pontos de sela: $(1,0)$ e $(-1,0)$.

   **m)** Ponto de mínimo: $(1,1)$; ponto de máximo: $(-1,-1)$; pontos de sela: $(1,-1)$ e $(-1,1)$.

   **n)** Pontos de mínimo: $(-1,1)$ e $(-1,-1)$; ponto de máximo: $(0,0)$; pontos de sela: $(0,1),(0,-1),(1,0)$ e $(-1,0)$.

   **o)** Ponto de mínimo : $(1,1)$; ponto de sela: $\left(\dfrac{23}{12},-\dfrac{5}{6}\right)$.

   **p)** Ponto de mínimo : $(-1,-1)$.

   **q)** Ponto de sela: $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

   **r)** Ponto de mínimo : $(2,1)$; ponto de sela: $(0,0)$.

   **s)** Não há pontos críticos.

   **t)** Ponto de mínimo : $\left(\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{3}\right)$; ponto de sela: $(-1,1)$.

   **u)** Ponto de mínimo: $\left(2^{2/5},2^{-1/5}\right)$.

   **v)** Ponto de mínimo: $(1,1)$; ponto de sela: $(0,0)$.

   **w)** Ponto de mínimo: $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$.

8. Note que todos os pontos críticos são da forma $\left(x, \frac{1}{2}x\right)$ e que $f(x,y) = (x-2y)^2 + 2 \geq 2$, com igualdade justamente se $y = \frac{1}{2}x$.

9. **a)** Valor máximo: 2; valor mínimo: $-2$.

   **b)** Valor máximo: 7; valor mínimo: 4.

   **c)** Valor máximo: 2; valor mínimo: 0.

   **d)** Valor máximo: 2; valor mínimo: $-2$.

   **e)** Valor máximo: 18; valor mínimo: $-18$.

   **f)** Valor máximo: 1; valor mínimo: 0.

   **g)** Valor máximo: 6; valor mínimo: $-3$.

   **h)** Valor máximo: $\frac{8\sqrt{10}}{10}$; valor mínimo: $-\sqrt{10}$.

   **i)** Valor máximo: 0; valor mínimo: $-2$.

   **j)** Valor máximo: $\frac{25}{8}$; valor mínimo: 0.

   **l)** Valor máximo: 4; valor mínimo: $-4$.

   **m)** Valor máximo: 2; valor mínimo: 0.

10. $\sqrt{3}$.

11. $\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{34}\right)$.

12. $(0,2)$.

13. 25.

14. $(2,1,\sqrt{5})$ e $(2,1,-\sqrt{5})$.

15. $(0,3,0)$ e $(0,-3,0)$.

16. $x = y = z = \frac{100}{3}$.

17. $\frac{8}{3\sqrt{3}}r^3$.

18. A caixa é um cubo com arestas de comprimento $\frac{c}{12}$.

19. 40cm $\times$ 40cm $\times$ 20cm.

20. É preciso maximizar de $P = 2q - 2q^2 + 2r - 2r^2 - 2rq$ no conjunto delimitado pelas retas $q = 0$, $r = 0$ e $q + r = 1$. O ponto de máximo ocorre em $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, no qual o valor de $P$ é justamente $\frac{2}{3}$.

21. As duas equações são obtidas como pontos críticos da função $\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (mx_i + b))^2 = f(m,b)$. Note que de fato pontos satisfazendo as equações são pontos de mínimo de $f$.

22. Note que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

23. $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{355}{36}\right)$.

24. **a)** $\frac{3}{4}$.

    **b)** $f(1,1) = 3$.

25. $\frac{\sqrt{14}}{7}$.

26. $\left(\frac{2}{\sqrt[4]{12}}, \sqrt[4]{12}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{12}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt[4]{12}}, \sqrt[4]{12}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{12}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt[4]{12}}, \sqrt[4]{12}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{12}}\right)$ e $\left(-\frac{2}{\sqrt[4]{12}}, \sqrt[4]{12}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{12}}\right)$.

27. $\frac{8}{\sqrt{3}} \times \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{12}{\sqrt{3}}$.

28. **a)** $(0,0), (1,1)$ e $(-1,-1)$.

    **b)** Pontos de mínimo: $(1,1)$ e $(-1,-1)$; ponto de sela: $(0,0)$.

29. **a)** $(1,2)$ e $(-1,0)$.

    **b)** $f(1,2) = f(-1,0) = 0$. Note que $f(x,y) \leq 0$, o que implica que $(1,2)$ e $(-1,0)$ são pontos de máximo.

30. **a)** Pontos críticos: $(0,0)$ e $(1,0)$. Ponto de máximo: $(1,0)$; ponto de sela: $(0,0)$.

    **b)** 1.

31. **a)** Ponto de máximo: $\left(\frac{6}{\sqrt{38}}, \frac{1}{\sqrt{38}}\right)$; ponto de mínimo: $\left(-\frac{6}{\sqrt{38}}, -\frac{1}{\sqrt{38}}\right)$.

    **b)** Ponto de máximo: $\left(\frac{6}{\sqrt{38}}, \frac{1}{\sqrt{38}}\right)$; ponto de mínimo: $\left(-\frac{6}{\sqrt{38}}, -\frac{1}{\sqrt{38}}\right)$.

    **c)** Ponto de mínimo: $\left(\frac{6}{19}, \frac{1}{19}\right)$.

    **d)** Ponto de mínimo: $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

    **e)** Pontos de máximo: $(2,1)$ e $(-2,-1)$; pontos de mínimo: $(-2,1)$ e $(2,-1)$.

    **f)** Ponto de mínimo: $(-1,1)$

**g)** Pontos de máximo: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;
ponto de mínimo: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

**h)** Ponto de máximo: $(2,0)$; pontos de mínimo: $\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}, \frac{-2\sqrt{2}}{3}\right)$.

**i)** Ponto de máximo local: $\left(-\frac{13}{7}, \frac{17}{7}\right)$; ponto de mínimo local: $(1,1)$.

**j)** Pontos de máximo: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
pontos de mínimo: $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ e $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

32. **a)** Não há valor máximo; valor mínimo: 2.
 **b)** Valor máximo: 26; valor mínimo: $-26$.
 **c)** Valor máximo: 4; valor mínimo: $-4$.
 **d)** Valor máximo: 70; valor mínimo: $-70$.
 **e)** Valor máximo: 1; valor mínimo: $\frac{1}{3}$.
 **f)** Valor máximo: $\sqrt{n}$; valor mínimo: $-\sqrt{n}$.
 **g)** Valor máximo: $\frac{3}{2}$; valor mínimo: $\frac{1}{2}$.

33. Note que quando $x \to 0$, tem-se $y \to \infty$ e $f(x,y) \to \infty$; e quando $x \to -\infty$, tem-se $y \to 0$ e $f(x,y) \to -\infty$, logo não há valores máximo e mínimo de $f$ sujeito a esta restrição.

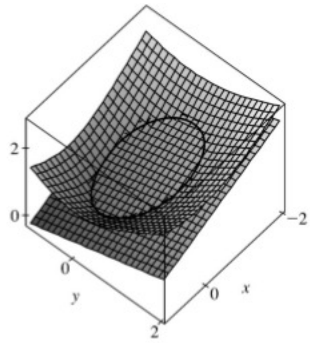
34. Valor máximo: $f(-2, \pm 2\sqrt{3}) = 47$ e valor mínimo $f(1,0) = -7$.

35. Use multiplicadores de Lagrange para determinar o máximo de $P(L,K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ sujeita a restrição $g(L,K) = mL + nK = p$ e encontrar $L = \frac{Kn\alpha}{m(1-\alpha)}$. Substitua em $mL + nK = p$.

36. **a)** Use multiplicadores de Lagrange para maximizar $f(a,b,c) = a^2b^2c^2$ sujeita a restrição $a^2 + b^2 + c^2 = r^2$.
 **b)** Como $(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$ está na esfera $a + b + c = r^2$, pelo item (a) segue que
 $$abc = f(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}) \leq \left(\frac{r^2}{3}\right)^3 = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3.$$

37. Mais próximo: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e mais distante: $(-1,-1,2)$.

38. **a)** Gráficos em um mesmo sistema:




**b)** Ponto mais alto: $\left(-\dfrac{4}{3}, 1, \dfrac{5}{3}\right)$ e ponto mais baixo: $\left(\dfrac{4}{13}, -\dfrac{3}{13}, \dfrac{5}{13}\right)$.

39. $x^2 + 16y^2 = 8$; o ponto de tangência é $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.

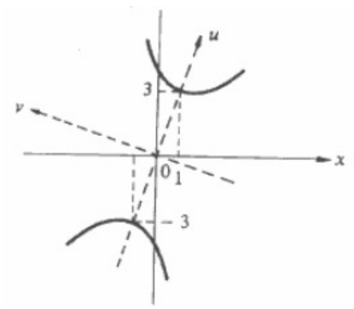
40. $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$.

41. $(2, 4)$.

42. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{2\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

43. $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$.

44. $(1, 3)$ e $(-1, -3)$. Realizando a mudança de coordenadas $x = \frac{1}{\sqrt{10}}u - \frac{3}{\sqrt{10}}v$ e $y = \frac{3}{\sqrt{10}}u + \frac{1}{\sqrt{10}}v$, a equação da curva inicial é transformada em $\frac{u^2}{10} - \frac{v^2}{40} = 1$, cujo gráfico é:




45. $6x + 4y + 3z = 12\sqrt{3}$.

46. Pontos de máximo: $(2, 1)$ e $(-2, -1)$; pontos de mínimo: $(-2, 1)$ e $(2, -1)$.

47. 16.

48. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$ e $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$.

49. Valor máximo: 1; valor mínimo: $-\dfrac{1}{2}$.

50. Valor máximo: $\dfrac{9}{4}$; valor mínimo: $-\dfrac{1}{4}$.

51. $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$ e $(-1, -1, 1)$.

# Referências


[1] J. Stewart. *Cálculo*, Volume 2, $6^a$ Edição, São Paulo, Pioneira/ Thomson Learning.

[2] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, Volume 2, $5^a$ Edição, 2002, Rio de Janeiro.

[3] G. B. Thomas. *Cálculo*, Volume 2, $10^a$ edição, São Paulo, Addison-Wesley/Pearson,2002.

[4] C.H Edwards Jr; D. E. Penney. *Cálculo com Geometria Analítica*, Volumes 2 e 3, Prentice Hall do Brasil, 1997.

[5] E. W. Swokowski, *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 2, $2^a$ Edição, Markron Books, 1995.