Quarta lista de exercícios de MA211 – Cálculo II

Exercício 1. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e suponha que $f_x(x,y) = 0$ e $f_y(x,y) = 0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que f é constante.

Exercício 2. Dê exemplo de uma função $f\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f_x(x,y) = 0$ e $f_y(x,y) = 0$, para todo $(x,y) \in A$, mas que f não seja constante em A.

Diferenciabilidade

Exercício 3. Utilizando a definição, prove que as funções abaixo são diferenciáveis.

a) $f(x,y) = xy$ b) $f(x,y) = x + y$ c) $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$

Exercício 4. Verifique que a função dada é diferenciável.

a) $f(x,y) = e^{x-y^2}$ b) $f(x,y) = x^4 + y^3$ c) $f(x,y) = x^2 y$

d) $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ e) $f(x,y) = x\cos(x^2 + y^2)$ f) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2 + 1}$

Exercício 5. Determine conjunto dos pontos onde f é diferenciável justificando sua resposta.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\left(\dfrac{1}{x^2+y^2-1}\right)} & se \quad x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & se \quad x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

Plano tangente e reta normal

Exercício 6. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada, no ponto dado.

a) $f(x,y) = 2x^2 y$, em $(1, 1, f(1,1))$ b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ em $(0, 1, f(0,1))$

c) $f(x,y) = 3x^3 y - xy$ em $(1, -1, f(1,-1))$ d) $f(x,y) = xe^{(x^2-y^2)}$ em $(2, 2, f(2,2))$

Exercício 7. Determine o plano que passa pelos pontos $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$.

Exercício 8. Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + y$ e tangente ao gráfico de $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Exercício 9. Se $z = 2x + y$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x,y)$ no ponto $(1,1,3)$, determine

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1).$$

Exercício 10. Considere a função $f(x,y) = x\phi\left(\frac{x}{y}\right)$, onde ϕ é uma função derivável de uma variável. Mostre que os planos tangentes ao gráfico de f passam pela origem.

Exercício 11. Seja $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$. Mostre que os planos tangentes ao gráfico de f passam pela origem.

Exercício 12. Sejam $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ e π o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a,b))$, com $a > 0$, $b > 0$ e $a^2 + b^2 < 1$. Seja V o volume do tetraedro determinado por π e pelos planos coordenados. Expresse V em função de a e de b e determine a e b de forma que

$$\frac{\partial V}{\partial a}(a,b) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial b}(a,b) = 0.$$

Exercício 13. A função $z = z(x,y)$ é diferenciável e dada implicitamente por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Mostre que a equação do plano tangente no ponto (x_0, y_0, z_0), $z_0 \neq 0$, é

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$$

Acréscimos e diferenciais

Exercício 14. Calcule a diferencial de f nos itens abaixo.
a) $f(x,y) = x^3y^2$ b) $f(x,y) = \sin xy$ c) $x = \arcsin uv$ d) $T = \ln(1 + p^2 + v^2)$

Exercício 15. Seja $z = xe^{x^2-y^2}$.

a) Calcule um valor aproximado para a variação Δz em z, quando se passa de $x = 1$ e $y = 1$ para $x = 1,01$ e $y = 1,002$.
b) Calcule um valor aproximado para z, correspondente a $x = 1,01$ e $y = 1,002$.

Exercício 16. Uma caixa cilíndrica é feita com um material de espessura $0,03m$. As medidas internas são: altura $2m$ e raio da base $1m$. A caixa é sem tampa. Calcule um valor aproximado para o volume do material utilizado na caixa.

Exercício 17. Calcule um valor aproximado para a variação ΔA na área de um retângulo quando os lados variam de $x = 2m$ e $y = 3m$ para $x = 2,01$ e $y = 2,97$.

Exercício 18. Calcule aproximadamente $(1,01)^{2,03}$.

Exercício 19. Suponha que $|a|$ é muito maior que $|b|$, $|c|$ e $|d|$ e considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Seja $f(a,b,c,d)$ o determinante de A. Para qual das variáveis a, b, c, d a função f é mais sensível?

Regra da cadeia

Exercício 20. Encontre $\dfrac{dw}{dt}$ nos casos abaixo de duas maneiras: substituindo diretamente e derivando com relação a t e usando a regra da cadeia. Após isso, calcule w no ponto t dado.
a) $w = x^2 + y^2$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t = \pi$
b) $w = \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{z}$, $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$, $z = 1/t$, $t = 3$
c) $w = z - \sin xy$ $x = t$, $y = \ln t$, $z = e^{t-1}$, $t = 1$
d) $w = x^2 + y^2$, $x = \cos t + \sin t$, $y = \cos t - \sin t$, $t = 0$

Exercício 21. Encontre $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial v}$ como função de u e de v nos casos abaixo. Após isso, calcule $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial v}$ no ponto (u,v) dado.

a) $w = xy + yz + xz$, $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$, $(u, v) = (1/2, 1)$
b) $w = \ln(x^2 + y^2 + y^2)$, $x = ue^v \sin u$, $y = ue^v \cos u$, $z = ue^v$, $(u, v) = (-2, 0)$

Exercício 22. Os comprimentos a, b, c dos lados de uma caixa retangular estão mudando com o tempo. No instante em questão $a = 1m$, $b = 2m$ $c = 3m$, $\dfrac{da}{dt} = \dfrac{db}{dt} = 1m/s$, e $\dfrac{dc}{dt} = -3m/s$. A quais taxas o volume V e a área superficial S da caixa estão mudando no instante em questão? A diagonal interior da caixa está aumentando ou diminuindo o comprimento?

Exercício 23. Seja $T = f(x, y)$ a temperatura em um ponto (x, y) no círculo $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$ e suponha que
$$\frac{\partial T}{\partial x} = 8x - 4y, \quad \text{e} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 8y - 4x.$$

a) Encontre onde as temperaturas máximas e mínimas no círculo ocorrem examinando $\dfrac{dT}{dt}$ e $\dfrac{d^2T}{dt^2}$.
b) Supondo $T = 4x^2 - 4xy + 4y^2$, encontre o valor máximo e o valor mínimo de T no círculo.

Exercício 24. Seja $T = f(x, y)$ a temperatura em um ponto (x, y) na elipse $x = 2\sqrt{2}\cos t$, $y = \sqrt{2}\sin t$, $0 \leq t \leq \pi$ e suponha que
$$\frac{\partial T}{\partial x} = y, \quad \text{e} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = x.$$

a) Encontre onde as temperaturas máximas e mínimas na elipse ocorrem examinando $\dfrac{dT}{dt}$ e $\dfrac{d^2T}{dt^2}$.
b) Supondo $T = xy - 2$, encontre o valor máximo e o valor mínimo de T na elipse.

Gradiente e derivada direcional

Exercício 25. Calcule ∇f nos casos abaixo.

a)$f(x, y) = x^2 y$ b)$f(x, y) = \dfrac{x}{y}$
c)$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ d) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + 1)^{z^2}$

Exercício 26. Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$. Represente geometricamente $\nabla f(x_0, y_0)$ sendo (x_0, y_0) os seguintes pontos:

a) $(1, 1)$ b) $(-1, 1)$ c) $(-1, -1)$ d) $(1, -1)$

Exercício 27. Sejam $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva diferenciável cuja imagem está contida na curva de nível $f(x, y) = 1$, isto é, para todo t no domínio de γ, $f(x(t), y(t)) = 1$. Seja $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$. Prove que $\langle \gamma'(t_0), \nabla f(x_0, y_0) \rangle = 0$. Interprete geometricamente.

Sugestão: note que, para todo t no domínio de γ, $x^2(t) + y^2(t) = 1$, derive com relação a t e substitua em $t = t_0$.

Exercício 28. Sejam $f(x, y) = xy$ e $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva diferenciável cuja imagem está contida na curva de nível $f(x, y) = 2$. Mostre que, para todo t no domínio de γ, $\langle \gamma'(t), \nabla f(\gamma(t)) \rangle = 0$. Dê exemplo de uma curva cuja imagem esteja contida na curva de nível $xy = 2$.

Exercício 29. Encontre a derivada direcional da função f, no ponto P_0 e na direção $\overrightarrow{u}$.

a) $f(x, y) = 2xy - 3y^2$, $P_0 = (5, 5)$, $\overrightarrow{u} = (4, 3)$
b) $f(x, y, z) = xy + yz + xz$, $P_0 = (1, -1, 2)$, $\overrightarrow{u} = (3, 6, -2)$

Exercício 30. Em qual direção a derivada de $f(x, y) = xy + y^2$, no ponto $P = (3, 2)$ é igual a zero?

Exercício 31. Existe uma direção $\overrightarrow{u}$ na qual a taxa de mudança da função temperatura $T(x, y, z) = 2xy - yz$ (a temperatura está sendo medida em graus Celsius e a distância em pés) em $P = (1, -1, 1)$ é $-3°\text{C/ft}$?

Exercício 32. Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy (adimita que x e y são dados em km e que a temparatura é medida em °C). Um indivíduo se encontra na posição $(3, 2)$e pretende dar um passeio.

a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se for seu desejo desfrutar sempre da mesma temperatura do ponto $(3, 2)$.
b) Qual a direção e sentido que deverá tomar se for seu desejo caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?
c) De quanto a temperatura se elevará aproximadamente, caso caminhe $0,01$km na direção encontrada no item b)?
d) De quanto a temperatura se decrescerá aproximadamente, caso caminhe $0,01$km na direção $\overrightarrow{j}$?