Terceira lista de exercícios de MA211 – Cálculo II

Exercício 1. Determine as derivadas parciais de f de ordem 1 em todos os pontos do domínio nos casos abaixo.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen} xy$ b) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ c) $f(x,y,z) = \|(x,y,z)\|$

d) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ e) $f(x,y) = x^2 \ln(1+x^2+y^2)$ f) $f(x,y) = xye^{xy}$

g) $f(x,y) = (4xy-3y^3)^3 + 5x^2y$ h) $f(x,y) = x^y$ i) $f(x,y) = \dfrac{x \operatorname{sen} y}{\cos(x^2+y^2)}$

j) $f(x,y,z) = e^{xy}\ln(y) + \cos(z^2)$ k) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y g(t)dt$, g contínua l) $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

Exercício 2. A lei dos gases ideais pode ser enunciada como $PV = cnT$, onde n é o número de moléculas do gás, V é o volume, T a temperatura, P a presão e c uma constante. Mostre que

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V} = -1.$$

Exercício 3. Seja $z = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$. Verifique que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Exercício 4. Seja $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função (de uma variável) diferenciável, tal que $\phi'(1) = 4$. Defina $g(x,y) = \phi\Big(\dfrac{x}{y}\Big)$.

(1) Calcule $g_x(1,1)$ e $g_y(1,1)$.
(2) Verifique que
$$xg_x(x,y) + yg_y(x,y) = 0,$$
para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ com $y \neq 0$.

Exercício 5. Seja $z = x \operatorname{sen}\Big(\dfrac{x}{y}\Big)$. Verifique que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Exercício 6. Seja $z = e^y\phi(x-y)$, onde ϕ é qualquer função de uma variável real diferenciável. Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Exercício 7. Seja $f(x,y) = (x^2+y^2)\phi\Big(\dfrac{x}{y}\Big)$, onde ϕ é qualquer função de uma variável real diferenciável. Verifique que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f.$$

Exercício 8. Encontre todas as derivadas parciais de f de segunda ordem nos casos abaixo.

a) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ b) $f(x,y) = xe^y + x^2 + 4$

c) $f(x,y) = \cos y + y \operatorname{sen} x$ d) $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$

Exercício 9. Sendo $u = \ln(x^2+y^2)$, verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Exercício 10. Sendo $v = e^{3x+4y}\cos 5z$, verifique que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

Exercício 11. Seja $v(x,t) = f(x - ct)$, onde f é uma função 2 vezes diferenciável de uma variável e c é uma constante. Verifique que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Exercício 12. Verifique que $f_{xy} = f_{yx}$ nos casos abaixo.

a) $f(x,y) = \ln(2x+3y)$ b) $f(x,y) = x^{20} + xy^{10}$
c) $f(x,y) = \cos y + y \operatorname{sen} x$ d) $f(x,y) = x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x$

Exercício 13. Nos exercícios abaixo, responda qual das derivadas mistas se pode calcular de maneira mais rápida: f_{xy} ou f_{yx}? Tente responder a esta questão antes de calcular as derivadas.

a) $f(x,y) = x \operatorname{sen} y + e^y$ b) $f(x,y) = 1/x$
c) $f(x,y) = x \ln xy$ d) $f(x,y) = y + x/y$

Observação. *Não é sempre que as derivadas parciais f_{xy} e f_{yx} são iguais! (Compare com o Teorema de Shwarz ou de Clairaut). O próximo exercício apresenta um exemplo onde a continuidade falha.*

Exercício 14. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

Trace o gráfico de f utilizando algum programa computacional.

Após isso, determine f_x e f_y nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$.

Usando a definição de derivada parcial calcule $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

Mostre que $f_{xy}(0,0) = -1$ e $f_{yx}(0,0) = 1$, isto é, não temos a igualdade das derivadas mistas de segunda ordem no ponto $(0,0)$.

Considere agora a função

$$g(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Trace o gráfico de g utilizando algum programa computacional. Você conseguiria dizer se g_{xy} e g_{yx} são diferentes em $(0,0)$ analisando somente o gráfico de g?

Exercício 15. O elipsóide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ intercepta o plano $y = 2$ em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente à elipse no ponto $(1,2,2)$.