Segunda lista de exercícios de MA211 – Cálculo II

Exercício 1. Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+\sin^2 y}{x^2+y^2}$ b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x}{x^2+x+y^2}$

j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}$ k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{y}$

Exercício 2. a) Utilize coordenadas polares, isto é, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, para estudar os seguintes limites (Note que $r \to 0^+$ quando $(x,y)\to(0,0)$):

1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ 2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$ 3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

b) Compare o resultado que você encontrou com os itens e), f) e g) do **Exercício 1**. Algo deu errado no item (3)? Explique.

O **Exercício 2** *tem como objetivo enfatizar que, mesmo utilizando coordenadas polares, para se mostrar que um certo limite existe é imprescindível a aplicação de um resultado do tipo do Teorema do Confronto.*

Exercício 3. Se a desigualdade

$$1-\frac{x^2y^2}{3} < \frac{\arctan xy}{xy} < 1$$

é satisfeita, o que podemos afirmar do limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan xy}{xy}?$$

Exercício 4. Se a desigualdade

$$2|xy| - \frac{x^2y^2}{6} < 4-4\cos\sqrt{|xy|} < 2|xy|$$

é satisfeita, o que podemos afirmar do limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}?$$

Exercício 5. Em cada um dos itens abaixo, seja $f\colon A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $n=2$ ou $n=3$. Determine o maior subconjunto de $\mathbb{R}^n$ onde f é contínua.

a) $f(x,y) = x^4+y^4-4x^2y^2$ b) $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ c) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2-1}$

d) $f(x,y,z) = \sqrt{x-2}\ln yz$

Exercício 6. Nos itens abaixo, seja $h\colon A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida pela composta $h := g\circ f$, onde $f\colon B\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ e $g\colon C\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Encontre a expressão de h e o conjunto onde ela é contínua.

a) $f(x,y)=x^2-y^2$, $g(t)=\dfrac{t^2-4}{t}$ b) $f(x,y) = x+g(y)$, $g(t)=t^2+1$

Exercício 7. Nos itens abaixo, verifique se existe um valor para L de maneira que a função seja contínua.

a)$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} & se \quad (x,y)\neq(0,0) \\ L & se \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$ b)$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & se \quad (x,y)\neq(0,0) \\ L & se \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

c)$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & se \quad (x,y)\neq(0,0) \\ L & se \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$