MA211 - Lista 15

Teorema do Divergente

4 de dezembro de 2016

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

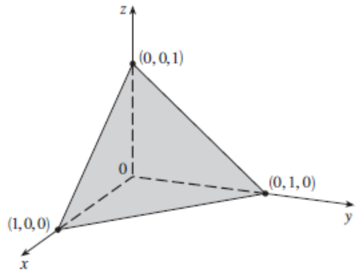
1. ♦ ([5], seção 18.6) Aplique o Teorema da Divergência para achar $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$.

   $\mathbf{F}(x,y,z) = y^3e^z\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j} + x\,\mathrm{arctg}\,y\,\mathbf{k}$, S é a superfície da região delimitada pelos planos coordenados e o plano $x+y+z=1$.

   Solução: Pelo Teorema do Divergente, temos

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \mathrm{div}\,\mathbf{F}\,dV,$$

em que E é o sólido



que pode ser escrito como

$$E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x \text{ e } 0\le z\le 1-x-y\}.$$

Observe que

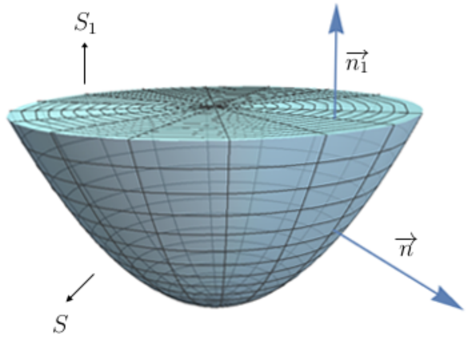
$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(y^3e^z) + \frac{\partial}{\partial y}(-xy) + \frac{\partial}{\partial z}(x\,\mathrm{arctg}\,y)\\
&= 0 - x + 0\\
&= -x.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \iiint_E \mathrm{div}\,\mathbf{F}\,dV\\
&= \iiint_E -x\,dV\\
&= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} -x\;dzdydx\\
&= \int_0^1\int_0^{1-x} -x(1-x-y)\;dydx\\
&= \int_0^1 \left(-\frac{x}{2} + x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\;dx\\
&= -\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

2. ([2], seção 10.2) Seja S o gráfico de $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\quad x^2 + y^2 \leq 1$ e seja $\mathbf{n}$ a normal a S com componete $z \leq 0$. Seja $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2y\,\mathbf{i} - xy^2\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Calcule $\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

Solução: Observe que S não é uma superfície fechada (isto é, S não é a fronteira de um sólido E). Para que possamos utilizar o Teorema do Divergente, vamos considerar a superfície S_2 constituída pelo paraboloide S e pelo círculo S_1 dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ em $z = 1$. Como S_2 é uma superfície fechada, usamos a escolha da normal $\mathbf{n_2}$ em S_2 que está apontando "para fora". Sejam $\mathbf{n_1}$ a normal a S_1 (apontando para cima) e $\mathbf{n}$ a normal a S (apontando para fora).



Temos

$$\iint\limits_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_2}\, dS = \iint\limits_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint\limits_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_1}\, dS,$$

isto é,

$$\iint\limits_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint\limits_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_2}\, dS - \iint\limits_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_1}\, dS.$$

Pelo Teorema do Divergente,

$$\iint\limits_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_2}\, dS = \iiint\limits_{E} (2xy - 2xy + 0)\, dV = 0,$$

em que E é o sólido que possui S_2 como fronteira.

Para determinar $\iint\limits_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_1}\, dS$, devemos encontrar uma parametrização para S_1 e determinar o vetor normal $\mathbf{n_1}$. Considere a seguinte parametrização de S_1: $r(u,v) = (u,v,1)$, com $u^2 + v^2 \leq 1$. Daí, $r_u(u,v) = (1,0,0)$ e $r_v(u,v) = (0,1,0)$. Logo, $r_u \times r_v = (0,0,1)$ é um vetor normal a S_1. Devemos tomar $\mathbf{n}_1 = (0,0,1)$ para que aponte para cima. Então,

$$\iint\limits_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_1}\, dS = \iint\limits_{D} (u^2v, -uv^2, 1) \cdot (0,0,1)\, dA,$$

em que $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; u^2+v^2 \leq 1\}$. Portanto,

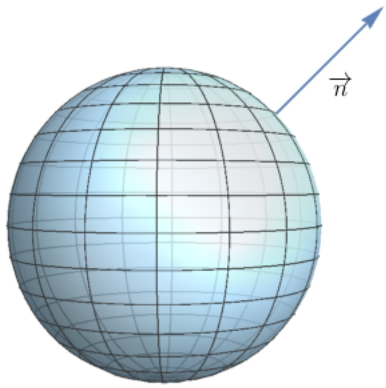
$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_1}\, dS = \iint_D 1\, dA = A(D) = \pi,$$

donde concluímos que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 - \pi = -\pi.$$

3. ([1], seção 16.9) Use o Teorema do Divergente para calcular $\iint_S (2x+2y+z^2)\, dS$ onde S é a esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$.

   Solução: A superfície S em questão é a esfera unitária, que é a fronteira da bola unitária B dada por $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ e tem vetor normal num ponto (x,y,z) igual a (x,y,z) (o qual aponta para "fora").



   Observe que podemos transformar o integrando $2x + 2y + z^2$ em $(2,2,z)\cdot(x,y,z)$ e essa escrita é interessante, já que o segundo vetor é exatamente o vetor normal a S. Agora estamos em condições de aplicar o Teorema do Divergente quando tomamos o campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (2,2,z)$. Assim,

$$\begin{aligned}\iint_S (2x+2y+z^2)\, dS &= \iint_S (2,2,z)\cdot(x,y,z)\, dS \\ &= \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS \\ &= \iiint_B \operatorname{div} F\, dV \\ &= \iiint_B (0+0+1)\, dV \\ &= V(B) = \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

4. ([1], seção 16.9) Demonstre a identidade, supondo que S e E satisfaçam as condições do Teorema do Divergente e que as funções escalares e as componentes dos campos vetoriais tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot dS = 0.$$

Solução: Pelo Teorema do Divergente, temos

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot dS = \iiint_E \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F})\, dV,$$

em que E é o sólido que tem S como fronteira. Observe que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}(R_y - Q_z) + \frac{\partial}{\partial y}(P_z - R_x) + \frac{\partial}{\partial z}(Q_x - P_y) \\ &= R_{xy} - Q_{xz} + P_{yz} - R_{yx} + Q_{zx} - P_{zy} = 0, \end{aligned}$$

pois, como as derivadas de segunda ordem são contínuas, temos, pelo Teorema de Clairaut, que $P_{yz} = P_{zy}$, $Q_{zx} = Q_{xz}$ e $R_{xy} = R_{yx}$. Portanto,

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot dS = 0.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. ♦ ([1], seção 16.9) Verifique que o Teorema do Divergente é verdadeiro para o campo vetorial $\mathbf{F}$ no região E.

   a) $\mathbf{F}(x,y,z) = 3x\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + 2xz\,\mathbf{k}$, E é o cubo limitado pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 1$.

   b) $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, E é o sólido delimitado pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano xy.

   c) $\mathbf{F}(x,y,z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$, E é o cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

   d) ★ $\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, E é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

6. ♦ ([5], seção 18.6) Aplique o Teorema da Divergência para achar $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

   a) $\mathbf{F}(x,y,z) = y \operatorname{sen} x\,\mathbf{i} + y^2 z\,\mathbf{j} + (x + 3z)\,\mathbf{k}$, S é a superfície da região delimitada pelos planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$. plano $x + y + z = 1$.

   c) ★ $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 + \operatorname{sen} yz)\,\mathbf{i} + (y - xe^{-z})\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, S é a superfície da região delimitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e os planos $x + z = 2$ e $z = 0$.

7. ♦ ([1], seção 16.9) ([5], seção 18.6) (Prova, 2014) Use o Teorema do Divergente para calcular o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S.

   a) $\mathbf{F}(x,y,z) = e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + e^x \cos y\,\mathbf{j} + yz^2\,\mathbf{k}$, S é a superfície da caixa delimitada pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 2$.

   b) $\mathbf{F}(x,y,z) = 3xy^2\,\mathbf{i} + xe^z\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$, S é a superfície do sólido delimitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $x = -1$ e $x = 2$.

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = x^3y\,\mathbf{i} - x^2y^2\,\mathbf{j} - x^2yz\,\mathbf{k}$, S é a superfície do sólido delimitado pelo hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e pelos planos $z = -2$ e $z = 2$.

d) $\mathbf{F}(x,y,z) = xy\ \mathrm{sen}\, z\,\mathbf{i} + \cos(xz)\,\mathbf{j} + y\ \cos z\,\mathbf{k}$, S é o elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

e) ★ $\mathbf{F}(x,y,z) = (\cos z + xy^2)\,\mathbf{i} + xe^{-z}\,\mathbf{j} + (\mathrm{sen}\, y + x^2z)\,\mathbf{k}$, S é a superfície do sólido limitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 4$.

f) $\mathbf{F}(x,y,z) = x^4\,\mathbf{i} - x^3z^2\,\mathbf{j} + 4xy^2z\,\mathbf{k}$, S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = x + 2$ e $z = 0$.

g) $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$, S é o gráfico de $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 1$.

h) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 + z^2)\,\mathbf{i} + (y^2 - 2xy)\,\mathbf{j} + (4z - 2yz)\,\mathbf{k}$, S é a superfície da região delimitada pelo cone $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ e pelo plano $x = 9$.

i) $\mathbf{F}(x,y,z) = 3x\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, S é a superfície da região delimitada pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e o plano-xy.

j) $\mathbf{F}(x,y,z) = 2xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$, S é a superfície da região delimitada pelos planos coordenados e os planos $x + 2z = 4$ e $y = 2$.

l) $\mathbf{F}(x,y,z) = (5x^3 + 12xy^2)\,\mathbf{i} + (y^3 + e^y\ \mathrm{sen}\, z)\,\mathbf{j} + (5z^3 + e^y\ \cos z)\,\mathbf{k}$, S é a superfície do sólido entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

8. ◆ ([2], seção 10.2) Calcule $\iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS$, sendo S a fronteira de B com normal exterior $\mathbf{n}$, sendo:

a) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq x \text{ e } 0 \leq z \leq 4\}$ e $\mathbf{u} = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$.

b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq x + y\}$ e $\mathbf{u} = -2xy\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + 3z\,\mathbf{k}$.

c) ★ $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ e $\mathbf{u} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$.

d) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 \leq 1,\, x^2 + y^2 \leq z \leq 5 - x^2 - y^2\}$ e $\mathbf{u} = 3xy\,\mathbf{i} - \dfrac{3}{2}y^2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$.

9. ([1], seção 16.9) Use o Teorema do Divergente para calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot dS$, onde $\mathbf{F}(x,y,z) = z^2x\,\mathbf{i} + (\frac{1}{3}y^3 + \mathrm{tg}\, z)\,\mathbf{j} + (x^2z + y^2)\,\mathbf{k}$ e S é a metade de cima da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. [*Sugestão*: observe que S não é uma superfície fechada. Calcule primeiro as integrais sobre S_1 e S_2, onde S_1 é o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$, orientado para baixo, e $S_2 = S \cup S_1$.]

10. (Prova, 2007) Seja $\mathbf{F} = (z\,\mathrm{tg}^{-1}(y^2), z^3 \ln(x^2 + 1), z)$. Determine o fluxo de $\mathbf{F}$ através da parte do parabolóide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está acima do plano $z = 1$ e está orientada para cima. (Observe que a superfície acima não é fechada.)

11. (Prova, 2006) Se $\mathbf{F} = (xz, yz, 2)$ e E é a região dada por $x^2 + y^2 \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$. Mostre que o Teorema do Divergente é verdadeiro neste caso. Calcule as duas integrais do enunciado do Teorema e mostre que elas têm o mesmo valor.

12. ♦ ([2], seção 10.2) Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y + z^2)\,\mathbf{k}$ e seja S a fronteira do cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e $0 \leq z \leq 3$. Calcule $\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ onde $\mathbf{n}$ é a normal exterior, isto é, $\mathbf{n}$ é a normal que aponta para fora do cilindro.

13. ([1], seção 16.9) Verifique que $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ para o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \dfrac{\epsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$.

14. ★ (Prova, 2008) Seja S a parte do parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 1$. Calcule o fluxo do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$$

através de S.

15. ([1], seção 16.9) Demonstre cada identidade, supondo que S e E satisfaçam as condições do Teorema do Divergente e que as funções escalares e as componentes dos campos vetoriais tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

   a) $\displaystyle\iint\limits_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$, onde $\mathbf{a}$ é um vetor constante.

   b) $\displaystyle V(E) = \frac{1}{3}\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot dS$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$.

   d) $\displaystyle\iint\limits_S D_n f\, dS = \iiint\limits_E \nabla^2 f\, dV.$

   e) $\displaystyle\iint\limits_S (f\nabla g) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint\limits_E (f\nabla^2 g + \nabla f + \nabla g)\, dV.$

   f) $\displaystyle\iint\limits_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint\limits_E (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dV.$

16. ([1], seção 16.9) Suponha que S e E satisfaçam as condições do Teorema do Divergente e que f seja uma função escalar com derivadas parciais contínuas. Demonstre que

$$\iint\limits_S f\mathbf{n}\, dS = \iiint\limits_E \nabla f\, dV.$$

   Estas integrais de superfície e triplas de funções vetoriais são vetores definidos integrando cada função componente. [*Sugestão*: comece aplicando o Teorema do Divergente a $\mathbf{F} = f\mathbf{c}$, onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante arbitrário.]

17. ([1], seção 16.9) Um sólido ocupa a região E com superfície S e está imerso em um líquido com densidade constante ρ. Escolhemos um sistema de coordenadas de modo que o plano xy coincida com a superfície do líquido e valores positivos de z sejam medidos para baixo, adentrando o líquido. Então, a pressão na profundidade z é $p = \rho g z$, onde g é a aceleração da gravidade. A

força de empuxo total sobre o sólido devida à distribuição de pressão é dada pela integral de superfície

$$\mathbf{F} = -\iint\limits_S p\mathbf{n}\, dS$$

onde $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário apontando para fora. Use o resultado do exercício anterior para mostrar que $\mathbf{F} = -W\mathbf{k}$, onde W é o peso do líquido deslocado pelo sólido. (Observe que $\mathbf{F}$ é orientado para cima porque z está orientado para baixo.) O resultado é o *Princípio de Arquimedes*: a força de empuxo sobre um objeto é igual ao peso do líquido deslocado.

5. **a)** $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \dfrac{9}{2}$.

   b) $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV = 8\pi$.

   c) $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \dfrac{\pi}{2}$.

   d) $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV = 4\pi$.

6. **a)** 24.

   c) 20π.

7. **a)** 2.

   b) $\dfrac{9\pi}{2}$.

   c) 0.

   d) 0.

   e) $\dfrac{32\pi}{3}$.

   f) $\dfrac{2\pi}{3}$.

   g) 0.

   h) 972π.

   i) $\dfrac{136\pi}{3}$.

   j) 24.

   l) $12\pi(4\sqrt{2} - 1)$.

8. **a)** $\dfrac{38}{3}$.

   b) 2π.

   c) $\dfrac{8\pi}{3}$.

   d) 4π.

9. $\dfrac{13\pi}{20}$.

10. $\dfrac{3\pi}{2}$.

11. π.

12. 36π.

13. Note que $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{|\mathbf{x}|^3}\right) = \dfrac{|\mathbf{x}|^2 - 3x^2}{|\mathbf{x}|^5}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{|\mathbf{x}|^3}\right) = \dfrac{|\mathbf{x}|^2 - 3y^2}{|\mathbf{x}|^5}$ e $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{x}{|\mathbf{x}|^3}\right) = \dfrac{|\mathbf{x}|^2 - 3z^2}{|\mathbf{x}|^5}$.

14. $\pi(2-\sqrt{2})$.

15. **a)** Note que $\operatorname{div}\mathbf{a}=0$.

b) Note que $\displaystyle\iiint\limits_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV=\iiint\limits_E 3\,dV$.

d) Lembre que $D_n f=\nabla f\cdot\mathbf{n}$ e $\operatorname{div}(\nabla f)=\nabla^2 f$.

e) Note que $\displaystyle\iint\limits_S (f\nabla g)\cdot\mathbf{n}\,dS=\iiint\limits_E \operatorname{div}(f\nabla g)\,dV$.

f) Use o Teorema da Divergência e que $\nabla f\cdot\nabla g=\nabla g\cdot\nabla f$.

16. Note que se $\mathbf{n}=n_1\,\mathbf{i}+n_2\,\mathbf{j}+n_3\,\mathbf{k}$, então

$$\begin{aligned}\iint_S f\cdot\mathbf{n}\,dS&=\left(\iint_S fn_1\,dS\right)\mathbf{i}+\left(\iint_S fn_2\,dS\right)\mathbf{j}+\left(\iint_S fn_3\,dS\right)\mathbf{k}\\&=\left(\iiint_E \frac{\partial f}{\partial x}\,dV\right)\mathbf{i}+\left(\iiint_E \frac{\partial f}{\partial y}\,dV\right)\mathbf{j}+\left(\iiint_E \frac{\partial f}{\partial z}\,dV\right)\mathbf{k}\,.\end{aligned}$$

17. Note que $\displaystyle\mathbf{F}=-\int_S p\mathbf{n}\,dS=-\iiint_E \nabla p\,dV=-\iiint_E \nabla p\,dV=-\iiint_E \nabla(\rho g z)\,dV.$

Conclua usando que $W=\rho g V(E)$, onde $V(E)$ é o volume de E.

Referências

[1] J. Stewart. *Cálculo*, Volume 2, 6^a Edição, São Paulo, Pioneira/ Thomson Learning.

[2] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, Volume 3, 5^a Edição, 2002, Rio de Janeiro.

[3] G. B. Thomas. *Cálculo*, Volume 2, 10^a edição, São Paulo, Addison-Wesley/Pearson,2002.

[4] C. H. Edwards Jr; D. E. Penney. *Cálculo com Geometria Analítica*, Volumes 2 e 3, Prentice Hall do Brasil, 1997.

[5] E. W. Swokowski. *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 2, 2^a Edição, Markron Books, 1995.