MA211 - Lista 14
Integrais de Superfícies e Teorema de Stokes

4 de dezembro de 2016

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. ⧫ ([1], seção 16.7) ([2], seção 9.4) Calcule a integral de superfície.

   a) $\displaystyle\iint_S x^2z^2\,dS$, onde S é a parte do cone $z^2 = x^2+y^2$ que está entre os planos $z=1$ e $z=3$.

   b) $\displaystyle\iint_S \frac{z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\,dS$, onde S é a parte do paraboloide $z = 1-x^2-y^2$ que se encontra dentro do cilindro $x^2+y^2\leq 2y$.

   Solução:

   a) Temos que S é a porção do cone $z^2 = x^2+y^2$ para $1\leq z\leq 3$, ou equivalentemente, S é a parte da superfície $z=\sqrt{x^2+y^2}$ sobre a região $D=\{(x,y)|\,1\leq x^2+y^2\leq 9\}$. Assim,

$$\iint_S x^2z^2\,dS = \iint_D x^2(x^2+y^2)\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}\;dA$$

$$= \iint_D x^2(x^2+y^2)\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+1}\;dA$$

$$= \iint_D x^2(x^2+y^2)\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+1}\;dA = \iint_D \sqrt{2}\,x^2(x^2+y^2)\,dA$$

$$= \sqrt{2}\iint_D x^2(x^2+y^2)\,dA.$$

   Por coordenadas polares, temos que

$$x = r\,\cos\theta,\quad y = r\,\operatorname{sen}\theta,\quad 1\leq r\leq 3\;\;,\;\;0\leq\theta\leq 2\pi\;\;\text{e}\;\;dA = r\,dr\,d\theta.$$

   Logo,

$$\iint_S x^2z^2\,dS = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^3 (r^2\cos^2\theta)(r^2)\,r\,dr\,d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\cdot\int_1^3 r^5\,dr$$

$$= \sqrt{2}\cdot(\theta)\Big|_0^{2\pi}\cdot\left(\frac{r^6}{6}\right)\Big|_1^3 = \sqrt{2}\cdot\pi\cdot\frac{1}{6}\cdot(3^6-1) = \frac{364\sqrt{2}}{3}\pi$$

b) Parametrizando a superfície S, temos as seguintes equações paramétricas:

$$x = u, \quad y = v \quad \text{e} \quad z = 1 - u^2 - v^2.$$

Então,

$$\mathbf{r}(u, v) = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + (1 - u^2 - v^2)\,\mathbf{k}.$$

Logo,

$$f(\mathbf{r}(u, v)) = \frac{1 - u^2 - v^2}{\sqrt{1 - 4u^2 - 4v^2}},$$

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 2u\,\mathbf{k}$$

e

$$\mathbf{r}_v = 0\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2v\,\mathbf{k}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} \\ &= 2u\,\mathbf{i} + 2v\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \end{aligned}$$

implicando que

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{(2u)^2 + (2v)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}.$$

Assim,

$$\iint\limits_S \frac{z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}\,dS = \iint\limits_D f(\mathbf{r}(u.v))|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv$$

$$= \iint\limits_D \frac{1 - u^2 - v^2}{\sqrt{1 - 4u^2 - 4v^2}}\,\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}\,du\,dv = \iint\limits_D (1 - u^2 - v^2)\,du\,dv$$

Notemos que

$$D = \{(u, v)|\, u^2 + v^2 \leq 2v\} = \{(u, v)|\, u^2 + (v - 1)^2 \leq 1\}.$$

Em coordenadas polares teremos que

$$u = r\,\cos\theta, \;\; v - 1 = r\,\operatorname{sen}\theta,$$

$$du\,dv = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} & \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} & \dfrac{\partial v}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr\,d\theta = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\,\cos\theta \end{vmatrix} du\,dv = r\,dr\,d\theta.$$

Como $u^2 + u^2 = 2u \Rightarrow r^2\,\cos^2\theta + r^2\,\operatorname{sen}^2\theta = r\,\operatorname{sen}\theta \Rightarrow r = 2\,\operatorname{sen}\theta$. Assim

$$0 \leq r \leq 2\,\operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Então,

$$\iint\limits_S \frac{z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\, dS = \int_0^{\pi}\int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} (1 - r^2\,\cos^2\theta - r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} (1-r^2) r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} (r - r^3)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} (2\,\mathrm{sen}^2\,\theta - 4\,\mathrm{sen}^4\,\theta)\Big|_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} d\theta = 2\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2\,\theta\, d\theta - 4\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^4\,\theta$$

$$= 2\cdot\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2\theta\right)\Big|_0^{\pi} - 4\cdot\left(-\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}^3\,\theta\cos\theta + \frac{3}{8}\theta - \frac{3}{16}\,\mathrm{sen}\,2\theta\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{2} - 4\cdot\left(\frac{3}{8}\pi\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

2. ([1], seção 16.7) A temperatura em um ponto (x, y, z) em uma substância com condutividade $K = 6,5$ é $u(x, y, z) = 2y^2 + 2z^2$. Determine a taxa de transmissão de calor nessa substância para dentro da superfície cilíndrica $y^2 + z^2 = 6$, $0 \leq x \leq 4$.

Solução: O fluxo de calor, com $u(x, y, z) = 2y^2 + 2z^2$, é dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -K\,\nabla u = -6,5(0\,\mathbf{i} + 4y\,\mathbf{j} + 4z\,\mathbf{k}) = 0\,\mathbf{i} - 26y\,\mathbf{j} - 26z\,\mathbf{k}.$$

Temos que S é a superfície cilíndrica $y^2 + z^2 = 6$ e $0 \leq x \leq 4$. As equações paramétricas de S são:

$$x = x, \quad y = \sqrt{6}\,\cos\theta \quad \text{e} \quad z = \sqrt{6}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

onde $0 \leq x \leq 4$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Então,

$$\mathbf{r}(x,\,\theta) = x\,\mathbf{i} + \sqrt{6}\,\cos\theta\,\mathbf{j} + \sqrt{6}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{k}.$$

Como queremos o fluxo de calor para dentro de S devemos calcular

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot dS = \iint\limits_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(x,\theta))\cdot(\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta)\, dA.$$

Então,

$$\mathbf{r}_x(x,\theta) = \mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

e

$$\mathbf{r}_\theta(x,\theta) = 0\,\mathbf{i} - \sqrt{6}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j} - \sqrt{6}\,\cos\theta\,\mathbf{k}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6}\,\mathrm{sen}\,\theta & -\sqrt{6}\,\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= 0\,\mathbf{i} - \sqrt{6}\,\cos\theta\,\mathbf{j} - \sqrt{6}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{k},\end{aligned}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(x,\theta)) = (0\,\mathbf{i} - 26\sqrt{6}\,\cos\theta\,\mathbf{j} - 26\sqrt{6}\,\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k})$$

e

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(x,\theta))\cdot(\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_\theta) = (0\,\mathbf{i}-26\sqrt{6}\,\cos\theta\,\mathbf{j}-26\sqrt{6}\,\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k})\cdot(0\,\mathbf{i}-\sqrt{6}\,\cos\theta\,\mathbf{j}-\sqrt{6}\,\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}) = 156$$

Assim, a taxa de fluxo de calor para dentro de S é:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(x,\theta))\cdot(\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_\theta)\,dA = \iint_D 156\,dA = 156\iint_D 1\,dA$$

$$= 156\int_0^{2\pi}\int_0^4 1\,dx\,d\theta = 156\int_0^{2\pi} d\theta\cdot\int_0^4 dx = 156\cdot(\theta)\Big|_0^{2\pi}\cdot(x)\Big|_0^4 = 156\cdot 2\pi\cdot 4 = 1248\,\pi.$$

3. ([1], seção 16.8) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, com $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{j} + e^{xy}\,\mathbf{k}$ e C é a circunferência $x^2+y^2=16$, $z=5$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

Solução: Temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & 2xz & e^{xy} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial(e^{xy})}{\partial y} - \frac{\partial(2xz)}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial(yz)}{\partial z} - \frac{\partial(e^{xy})}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial(2xz)}{\partial x} - \frac{\partial(yz)}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\
&= (xe^{xy} - 2x)\,\mathbf{i} - (ye^{xy} - y)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Tomemos S como o disco $x^2+y^2\le 16$ no plano $z=5$, logo a fronteira de S é C. Como C é orientada no sentido anti-horário quando vista de cima, orientamos S para cima. Então $\mathbf{n}=\mathbf{k}$ e

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k} = z.$$

Portanto,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot dS = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$= \iint_S z\,dS = \iint_S 5\,dS = 5\iint_S 1\,dS = A(S) = 5\cdot\pi\cdot(4)^2 = 80\,\pi.$$

4. ([1], seção 16.8) Se S é uma esfera e $\mathbf{F}$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Stokes, mostre que $\iint\limits_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 0$.

Solução: Suponha que S seja a esfera de raio a centrada na origem. Considere H_1 e H_2 os hemisférios superior e inferior de S, respectivamente. Então,

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot dS = \iint_{H_1}\operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot dS + \iint_{H_2}\operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot dS = \underbrace{\oint_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}}_{\text{Teorema de Stokes}}.$$

Mas C_1 é a curva $x^2 + y^2 = a^2$ orientada no sentido anti-horário, enquanto C_2 é a mesma curva só que orientada no sentido horário.
Assim,

$$\oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Portanto,

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot dS = \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. ♦ ([1], seção 16.7) ([2], seção 9.4) Calcule a integral de superfície.

a) $\displaystyle\iint_S x^2yz\,dS$, onde S é a parte do plano $z = 1 + 2x + 3y$ que está acima do retângulo $[0,3] \times [0,2]$.

b) $\displaystyle\iint_S yz\,dS$, onde S é a parte do plano $x + y + z = 1$ que está no primeiro octante.

c) ★ $\displaystyle\iint_S yz\,dS$, onde S é a superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u \cos v$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \pi/2$.

d) $\displaystyle\iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dS$, onde S é o helicoide com equação vetorial $\mathbf{r}(u,v) = u \cos v\,\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \pi$.

e) $\displaystyle\iint_S z\,dS$, onde S é a superfície $x = y + 2z^2$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

f) $\displaystyle\iint_S y\,dS$, onde S é a parte do paraboloide $y = x^2 + z^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + z^2 = 4$.

g) $\displaystyle\iint_S y^2\,dS$, onde S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy.

h) $\displaystyle\iint_S x\,dS$, onde S é a superfície com equações paramétricas $x = u$, $y = v$, $z = u^2 + v$, $0 \leq u \leq 1$, $u^2 \leq v \leq 1$.

i) $\displaystyle\iint_S xy\,dS$, onde S é a superfície com equações paramétricas $x = u - v$, $y = u + v$, $z = 2u + v + 1$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq u$.

j) $\displaystyle\iint_S y\,dS$, onde S é a superfície com equações paramétricas $x = u$, $y = v$, $z = 1 - u^2$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \sqrt{u}$.

6. ([4], seção 18.5) Calcule $\displaystyle\iint_S g(x,y,z)\,dS$.

   a) $g(x,y,z)=x^2$; S é o hemisfério superior de $x^2+y^2+z^2=a^2$.

   b) $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$; S é a parte do plano $z=y+4$ interior ao cilindro $x^2+y^2=4$.

   c) $g(x,y,z)=x+y$; S é parte do primeiro octante do plano $2x+3y+z=6$.

   d) $g(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$; S é a porção do paraboloide $2z=x^2+y^2$ interior ao cilindro $x^2+y^2=2y$.

7. ([3], seção 13.5) Integre $g(x,y,z)=x+y+z$ sobre a superfície do cubo cortado do primeiro octante pelos planos $x=a$, $y=a$ e $z=a$.

8. ([3], seção 13.5) Integre $g(x,y,z)=xyz$ sobre a superfície do sólido retangular cortado do primeiro octante pelos planos $x=a$, $y=b$ e $z=c$.

9. ([3], seção 13.5) Integre $g(x,y,z)=x+y+z$ sobre a porção do plano $2x+2y+z=2$ que está no primeiro octante.

10. ♦ ([1], seção 16.7) ([4], seção 18.5) Calcule a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ para o campo vetorial $\mathbf{F}$ e superfície orientada S. Em outras palavras, determine o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S. Para superfícies fechadas, use a orientação positiva (para fora).

    a) $\mathbf{F}(x,y,z)=xy\,\mathbf{i}+yz\,\mathbf{j}+zx\,\mathbf{k}$, S é a parte do paraboloide $z=4-x^2-y^2$ que está acima do quadrado $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, com orientação para cima.

    b) $\mathbf{F}(x,y,z)=xze^y\,\mathbf{i}-xze^y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$, S é a parte do plano $x+y+z=1$ no primeiro octante, com orientação para baixo.

    c) $\mathbf{F}(x,y,z)=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$, S é a esfera $x^2+y^2+z^2=9$.

    d) ★ $\mathbf{F}(x,y,z)=y\,\mathbf{j}-z\,\mathbf{k}$, S é formada pelo paraboloide $y=x^2+z^2$, $0\le y\le 1$ e pelo círculo $x^2+z^2\le 1$, $y=1$.

    e) $\mathbf{F}(x,y,z)=x\,\mathbf{i}+2y\,\mathbf{j}+3z\,\mathbf{k}$, S é o cubo com vértices $(\pm1,\pm1,\pm1)$.

    f) $\mathbf{F}(x,y,z)=x^2\,\mathbf{i}+y^2\,\mathbf{j}+z^2\,\mathbf{k}$, S é a fronteira do semicilindro sólido $0\le z\le\sqrt{1-y^2}$, $0\le x\le 2$.

    g) $\mathbf{F}(x,y,z)=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$, S é a parte no primeiro octante do plano $2x+3y+z=6$.

    h) $\mathbf{F}(x,y,z)=(x^2+z)\,\mathbf{i}+y^2z\,\mathbf{j}+(x^2+y^2+z)\,\mathbf{k}$, S é a parte no primeiro octante do paraboloide $z=x^2+y^2$ interceptada pelo plano $z=4$.

    i) $\mathbf{F}(x,y,z)=(x+y)\,\mathbf{i}+z\,\mathbf{j}+xz\,\mathbf{k}$, S é a superfície do cubo de vértices $(\pm1,\pm1,\pm1)$.

    j) $\mathbf{F}(x,y,z)=x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$, S é a superfície do sólido delimitado pelos gráficos de $z=x^2+y^2$ e $z=4$.

11. ♦ ([4], seção 18.5) Ache $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$ se $\mathbf{n}$ é uma normal unitária superior de S.

   a) $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$; S é o hemisfério superior de $x^2+y^2+z^2=a^2$.

   b) $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}$; S é a parte no primeiro octante da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$.

   c) $\mathbf{F} = 2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+3\mathbf{k}$; S é a parte do cone $z=(x^2+y^2)^{1/2}$ interior ao cilindro $x^2+y^2=1$.

   d) $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$; S é a parte do plano $3x+2y+z=12$ interceptada pelos planos $x=0, y=0,\ x=1$ e $y=2$.

12. ([3], seção 13.5) Encontre o fluxo do campo $\mathbf{F}$ ao longo da porção da superfície dada no sentido especificado.

   a) ★ $\mathbf{F}(x,y,z) = -\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$; S é a superfície retangular $z=0$, $0\le x\le 2$, $0\le y\le 3$, sentido $\mathbf{k}$.

   b) $\mathbf{F}(x,y,z) = yx^2\,\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$; S é a superfície retangular $y=0$, $-1\le x\le 2,\ 2\le z\le 7$, sentido $-\mathbf{j}$.

13. ([3], seção 13.5) Encontre o fluxo exterior do campo $\mathbf{F}(x,y,z) = z^2\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - 3z\,\mathbf{k}$ através da superfície cortada do cilindro parabólico $z=4-y^2$ pelos planos $x=0,\ x=1$ e $z=0$.

14. ([3], seção 13.5) Encontre o fluxo exterior do campo $\mathbf{F} = 2xy\,\mathbf{i}+2yz\,\mathbf{j}+2xz\,\mathbf{k}$ ao longo da superfície do cubo cortado do primeiro octante pelos planos $x=a$, $y=a$ e $z=a$.

15. ([2], seção 10.1) Seja S a superfície $z=f(x,y)$, $(x,y)\in K$, de classe C^1 num aberto contendo K. (Observação: trata-se da superfície dada por $x=u$, $y=v$ e $z=f(u,v)$). Seja $\mathbf{n}$ a normal a S com componente $z>0$ e seja $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i}+Q\,\mathbf{j}+R\,\mathbf{k}$ um campo vetorial contínuo na imagem de S. Mostre que

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint\limits_K \left[-P\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\right] dxdy,$$

   onde P, Q e R são calculadas em $(x,y,f(x,y))$.

16. ([1], seção 16.7) Determine uma fórmula para $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ semelhante *à* Fórmula

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_D \left(-P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\right) dA$$

   para o caso onde S é dada por $y=h(x,z)$ e $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário que aponta para a esquerda.

17. ([1], seção 16.7) Um fluido tem densidade $870\,kg/m^3$ e escoa com velocidade

$$v = z\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k},$$

   onde x, y e z são medidos em metros e as componentes de v em metros por segundo. Encontre a vazão para fora do cilindro $x^2+y^2=4$, $0\le z\le 1$.

18. ([1], seção 16.7) A água do mar tem densidade 1025 kg/m^3 e escoa em um campo de velocidade $\mathbf{v} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$, onde x, y e z são medidos em metros e as componentes de $\mathbf{v}$ em metros por segundo. Encontre a vazão para fora do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$.

19. ([1], seção 16.7) Use a Lei de Gauss para achar a carga contida no hemisfério sólido
$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$, se o campo elétrico for $\mathbf{E}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$.

20. ([1], seção 16.7) Seja $\mathbf{F}$ um campo inverso do quadrado, ou seja, $\mathbf{F}(r) = cr/|r|^3$ para alguma constante c, onde $r = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Mostre que o fluxo de $\mathbf{F}$ por uma esfera S com centro na origem é independente do raio de S.

21. ([2], seção 10.1) Considere um escoamento com velocidade $\mathbf{v}(x, y, z)$ e densidade $\rho(x, y, z)$, tal que $\mathbf{u} = \rho\mathbf{v}$ seja dado por $\mathbf{u} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - 2z\,\mathbf{k}$. Seja S a superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq \sqrt{2}$, e seja $\mathbf{n}$ a normal com componente $z > 0$. Calcule o fluxo de $\mathbf{u}$ através de S. (Observe que, neste caso, o fluxo tem dimensões MT^{-1} (massa por unidade de tempo).)

22. ([2], seção 10.1) Seja $\mathbf{u}$ o campo do Exercício 21 e seja $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } z \geq \sqrt{2}\}$. Mostre que

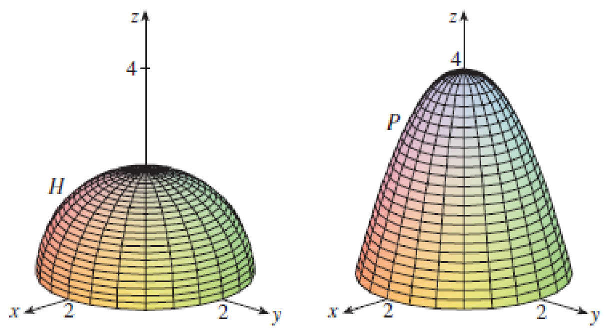
$$\iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{u}\, dxdydz,$$

onde S é a fronteira de B e $\mathbf{n}$ a normal unitária apontado para fora de B. Interprete.

23. ([2], seção 10.1) Seja $\mathbf{u}$ o campo do Exercício 21 e seja B a esfera $x^2+y^2+z^2 \leq 4$. Calcule $\iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS$, onde S é a fronteira de B, com normal $\mathbf{n}$ apontado para fora de B. (Sugestão: utilize coordenadas esféricas.)

24. ♦ ([1], seção 16.8) Dados um hemisfério H e uma parte P de um paraboloide, suponha que $\mathbf{F}$ seja um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ cujas componentes tenham derivadas parciais contínuas. Explique por que

$$\iint_H \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_P \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$



25. ♦ ([1], seção 16.8) (Provas, 2014,2007) Use o Teorema de Stokes para calcular $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

a) $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2z^2\,\mathbf{i} + y^2z^2\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$, S é a parte do paraboloide $z = x^2+y^2$ que está dentro do cilindro $x^2+y^2 = 4$, orientado para cima.

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = xyz\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + x^2yz\,\mathbf{k}$, S é formada pelo topo e pelos quatro lados (mas não pelo fundo) do cubo com vértices $(\pm1,\pm1,\pm1)$, com orientação para fora.

c) ★ $\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$, S é a parte do plano $x+z = 1$ dentro do cilindro $x^2+y^2 = 1$, com orientação para cima.

d) $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^{xy}\cos z, (x^2+1)z, -y)$, S é o hemisfério $x^2+y^2+z^2 = 1$, $x \geq 0$, orientado na direção positiva do eixo x.

26. ♦ ([1], seção 16.8) (Provas, 2014,2006) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Em cada caso, C é orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y^2)\,\mathbf{i} + (y+z^2)\,\mathbf{j} + (z+x^2)\,\mathbf{k}$, C é o triângulo com vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = xy\,\mathbf{i} + 2z\,\mathbf{j} + 3y\,\mathbf{k}$, C é a curva de interseção do plano $x+z = 5$ com o cilindro $x^2+y^2 = 9$.

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2-y)\,\mathbf{i} + 4z\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}$, C é a curva de interseção do plano $z = 2$ com o cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

d) $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2z\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, C é a curva de interseção do plano $x+y+z = 1$ com o cilindro $x^2+y^2 = 9$.

e) ★ $\mathbf{F}(x,y,z) = (y+z, -z, y)$, C é a curva obtida como interseção do cilindro $x^2+y^2 = 2y$ com o plano $y = z$.

f) $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xyz-2y, x^2+2x, x^2+2y)$, C é a circunferência $y^2+z^2 = 1$, $x = 2$.

27. ([1], seção 16.8) Verifique que o Teorema de Stokes é verdadeiro para o campo vetorial $\mathbf{F}$ dado e a superfície S.

a) $\mathbf{F}(x,y,z) = y^2\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, S é a parte do paraboloide $z = x^2+y^2$ que está acima do plano $z = 1$, orientado para cima.

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$, S é o hemisfério $x^2+y^2+z^2 = 1$, $y \geq 0$, orientado na direção positiva do eixo y.

28. ([1], seção 16.8) ♦ Seja C uma curva fechada, simples e lisa que está no plano $x+y+z = 1$. Mostre que a integral de linha

$$\int_C z\,dx - 2x\,dy + 3y\,dz$$

depende apenas da área da região englobada por C e não da forma de C ou de sua posição no plano.

29. ([1], seção 16.8) Uma partícula se move ao longo de segmentos de reta da origem aos pontos $(1,0,0)$, $(1,2,1)$, $(0,2,1)$ e de volta para a origem sob a influência do campo de forças

$$\mathbf{F}(x,y,z) = z^2\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} + 4y^2\,\mathbf{k}\,.$$

Encontre o trabalho feito.

30. ([1], seção 16.8) Suponha que S e C satisfaçam as hipóteses do Teorema de Stokes e f e g tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Demonstre que:

a) $\displaystyle\int_C (f\nabla g)\cdot\, d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g)\cdot d\mathbf{S}$

b) $\displaystyle\int_C (f\nabla f)\cdot d\mathbf{r} = 0$

c) $\displaystyle\int_C (f\nabla g + g\nabla f)\cdot d\mathbf{r} = 0$

31. ([2], seção 11.1) Utilizando o Teorema de Stokes, transforme a integral $\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot \mathbf{n}\,dS$ numa integral de linha e calcule.

a) $\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{k}$, S a superfície parametrizada por $\mathbf{r}(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$, $u^2+v^2 \leq 1$, sendo $\mathbf{n}$ a normal apontando para cima.

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} - x^2\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$, S a superfície parametrizada por $\mathbf{r}(u,v) = (u, v, 1-u^2)$, $u \geq 0$, $v \geq 0$, $u+v \leq 1$, sendo $\mathbf{n}$ a normal apontando para cima.

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, S a superfície parametrizada por $\mathbf{r}(u,v) = (u, v, 2u+v+1)$, $u \geq 0$, $u+v \leq 2$, sendo $\mathbf{n}$ a normal apontando para baixo.

d) $\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, S a superfície $x^2+y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ e $y \geq 0$, sendo $\mathbf{n}$ a normal com componente $y \geq 0$.

e) $\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{j}$, S a superfície $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1, x^2+y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, sendo $\mathbf{n}$ a normal com componente x positiva.

f) $\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i}$, S a superfície $z = x^2+y^2$ com $z \leq 1$, sendo $\mathbf{n}$ a normal com componente z positiva.

g) $\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i}$, S a superfície $x^2+y^2+z^2 = 2$, $x^2+y^2 \leq 1$ e $z \geq 0$, sendo $\mathbf{n}$ a normal apontando para cima.

h) $\mathbf{F}(x,y,z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}$, S a superfície $x^2+y^2+z^2 = 4$, $\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{3}$ e $y \geq 0$, sendo $\mathbf{n}$ a normal apontando para cima.

i) $\mathbf{F}(x,y,z) = -y^2\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, S a superfície $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 2$, $z \geq 1$, sendo $\mathbf{n}$ a normal que aponta para cima.

j) $\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$, S a superfície $z = x+y+2$ e $x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq 1$, sendo $\mathbf{n}$ a normal que aponta para baixo.

l) $\mathbf{F}(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}(-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k})$, S a superfície $x^2+y^2+z^2=1$, sendo $\mathbf{n}$ a normal apontando para fora da esfera.

32. (Prova, 2008) Calcule a integral de linha

$$\oint_C (y^2+z^2)\,dx + (z^2+x^3)\,dy + (y^2+x^3)\,dz,$$

em que C é a curva de interseção do cone $y = \sqrt{x^2+z^2}$ com a esfera $x^2+y^2+z^2=2$, orientada no sentido horário quando C é vista da origem.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. **a)** $171\sqrt{14}$.

   b) $\dfrac{\sqrt{3}}{24}$.

   c) $\dfrac{5\sqrt{5}}{48} + \dfrac{1}{240}$.

   d) $\dfrac{4\pi}{3}$.

   e) $\dfrac{13\sqrt{2}}{12}$.

   f) $\dfrac{\pi(391\sqrt{17}+1)}{60}$.

   g) $\pi\left(\dfrac{32}{3} - 6\sqrt{3}\right)$.

   h) $\dfrac{\sqrt{2}}{10}(3\sqrt{3}-2)$.

   j) $\dfrac{(5\sqrt{5}-1)}{24}$.

6. **a)** $\dfrac{2\pi a^4}{3}$.

   b) $76\pi\sqrt{2}$.

   c) $5\sqrt{14}$.

   d) $\dfrac{5\pi}{2}$.

7. $9a^3$.

8. $\dfrac{abc(ab+ac+bc)}{4}$.

9. 2.

10. **a)** $\dfrac{713}{180}$.

    b) $-\dfrac{1}{6}$.

    c) 108π.

    d) 0.

    e) 48.

    f) $2\pi + \dfrac{8}{3}$.

    g) 18.

    h) $4\pi - \dfrac{320}{7}$.

    i) 8.

j) 8π.

11. **a)** $2\pi a^3$.

    b) 0.

    c) 3π.

    d) 24.

12. **a)** 18.

    b) 30.

13. -32.

14. $3\pi a^4$.

15. Veja a subseção "Integrais de superfície de campos vetoriais" da seção 16.7 do livro do Stewart.

16. $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(P - Q\frac{\partial k}{\partial y} - R\frac{\partial k}{\partial z} \right) dA.$

17. 0 kg/s.

18. 0 kg/s.

19. $\dfrac{8\pi a^3 \epsilon_0}{3}$.

20. $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi c.$

21. $-4\pi\sqrt{2}$.

22. $\displaystyle\iiint_B \operatorname{div} \mathbf{u}\, dxdydz = -4\pi\sqrt{2}.$

23. 0.

24. Note que H e P satisfazem as hipóteses do Teorema de Stokes. Logo,

    $$\iint_H \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot\, d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_P \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot\, d\mathbf{S},$$

    onde C é a curva de fronteira.

25. **a)** 0.

    b) 0.

    c) 2π.

    d) -2π.

26. **a)** 1.

b) 9π.

c) 4π.

d) $\dfrac{81\pi}{2}$.

e) $\dfrac{4\pi}{3}$.

f) 2π.

27. **a)** $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \pi$.

    b) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\pi$.

28. $\displaystyle\int_C z\,dx - 2x\,dy + 3y\,dz = \frac{2}{\sqrt{3}} \times$ (Área da região englobada por C).

29. 3.

30. **a)** Note que $\operatorname{rot}(f\nabla g) = \nabla f \times \nabla g$.

    b) Note que $\operatorname{rot}(f\nabla f) = \mathbf{0}$.

    c) Note que $\operatorname{rot}(f\nabla g + g\nabla f) = \mathbf{0}$.

31. **a)** 0.

    b) $-\dfrac{5}{6}$.

    c) $-\dfrac{2}{3}$.

    d) 0.

    e) 0.

    f) $-\pi$.

    g) $-\pi$.

    h) π.

    i) 0.

    j) 4π.

    l) 0.

32. $-\dfrac{3\pi}{4}$.

Referências

[1] J. Stewart. *Cálculo*, Volume 2, 6^a Edição, São Paulo, Pioneira/ Thomson Learning.

[2] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, Volume 3, 5^a Edição, 2002, Rio de Janeiro.

[3] G. B. Thomas. *Cálculo*, Volume 2, 10^a edição, São Paulo, Addison-Wesley/Pearson,2002.

[4] E. W. Swokowski. *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 2, 2^a Edição, Markron Books, 1995.