MA211 - Lista 13

Rotacional, Divergente,
Superfícies Parametrizadas e suas Áreas

30 de novembro de 2016

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. ([1], seção 16.5) Existe um campo vetorial $\mathbf{G}$ em $\mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot} \mathbf{G} = (x \operatorname{sen} y, \cos y, z - xy)$? Justifique.

   Solução: Suponha que existe um campo vetorial $\mathbf{G}$ tal que $\operatorname{rot} G = (x \operatorname{sen} y, \cos y, z - xy)$. Vamos calcular $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{G}$. Temos que

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{G} = \frac{\partial (x \operatorname{sen} y)}{\partial x} + \frac{\partial (\cos y)}{\partial y} + \frac{\partial (z - xy)}{\partial z}$$

$$= \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y + 1 = 1. \tag{1}$$

   Sabemos que se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ e P, Q e R têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$. Como de (1) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{G} \neq 0$, pela contrapositiva do resultado acima, temos que $\mathbf{G}$ não é um campo vetorial do $\mathbb{R}^3$.

2. ([1], seção 16.5) Demonstre as identidades, admitindo que as derivadas parciais apropriadas existem e são contínuas. Se f for um campo escalar e $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ foram campos vetoriais, então $f\mathbf{F}$, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$ e $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ serão definidos por

$$\begin{aligned}
(f\mathbf{F})(x, y, z) &= f(x, y, z)\mathbf{F}(x, y, z) \\
(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(x, y, z) &= \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{G}(x, y, z) \\
(\mathbf{F} \times \mathbf{G})(x, y, z) &= \mathbf{F}(x, y, z) \times \mathbf{G}(x, y, z).
\end{aligned}$$

   a) $\operatorname{div} (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{G}$

   b) $\operatorname{div} (f\mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$

   c) $\operatorname{div} (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}$

   d) $\operatorname{div} (\nabla f \times \nabla g) = 0$

   Solução: Suponhamos que $\mathbf{F} = P_1\,\mathbf{i} + Q_1\,\mathbf{j} + R_1\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{G} = P_2\,\mathbf{i} + Q_2\,\mathbf{j} + R_2\,\mathbf{k}$.

   a) Temos que $F + G = (P_1 + P_2)\,\mathbf{i} + (Q_1 + Q_2)\,\mathbf{j} + (R_1 + R_2)\,\mathbf{k}$. Então,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) &= \frac{\partial (P_1 + P_2)}{\partial x} + \frac{\partial (Q_1 + Q_2)}{\partial y} + \frac{\partial (R_1 + R_2)}{\partial z} \\
&= \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} + \frac{\partial R_2}{\partial z} \\
&= \underbrace{\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z}}_{\operatorname{div} \mathbf{F}} + \underbrace{\frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial R_2}{\partial z}}_{\operatorname{div} \mathbf{G}.}
\end{aligned}$$

b) Temos que $f\mathbf{F} = (fP_1)\,\mathbf{i} + (fQ_1)\,\mathbf{j} + (fR_1)\,\mathbf{k}$. Então,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\mathbf{F}) &= \frac{\partial(fP_1)}{\partial x} + \frac{\partial(fQ_1)}{\partial y} + \frac{\partial(fR_1)}{\partial z} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot P_1 + f\cdot\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot Q_1 + f\cdot\frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot R_1 + f\cdot\frac{\partial R_1}{\partial z} \\
&= f\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z}\right)}_{\operatorname{div}\mathbf{F}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}P_1 + \frac{\partial f}{\partial y}Q_1 + \frac{\partial f}{\partial z}R_1}_{\nabla f\cdot\mathbf{F}} \\
&= f\cdot\ \operatorname{div}\mathbf{F} \quad + \quad \nabla f\cdot\mathbf{F}
\end{aligned}$$

c) Temos que $\mathbf{F}\times\mathbf{G} = (Q_1R_2 - Q_2R_1)\,\mathbf{i} + (P_2R_1 - P_1R_2)\,\mathbf{j} + (P_1Q_2 - Q_1R_2)\,\mathbf{k}$.
Então,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) &= \frac{\partial(Q_1R_2 - Q_2R_1)}{\partial x} + \frac{\partial(P_2R_1 - P_1R_2)}{\partial y} + \frac{\partial(P_1Q_2 - P_2Q_1)}{\partial z} \\
&= \frac{\partial(Q_1R_2)}{\partial x} - \frac{\partial(Q_2R_1)}{\partial x} + \frac{\partial(P_2R_1)}{\partial y} - \frac{\partial(P_1R_2)}{\partial y} + \frac{\partial(P_1Q_2)}{\partial z} - \frac{\partial(Q_1R_2)}{\partial z} \\
&= \frac{\partial Q_1}{\partial x}\cdot R_2 + Q_1\cdot\frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial Q_2}{\partial x}\cdot R_1 - Q_2\cdot\frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y}\cdot R_1 + P_2\cdot\frac{\partial R_1}{\partial y} \\
&- \frac{\partial P_1}{\partial y}\cdot R_2 - P_1\cdot\frac{\partial R_2}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial z}\cdot Q_2 + P_1\cdot\frac{\partial Q_2}{\partial z} - \frac{\partial P_2}{\partial z} - P_2\cdot\frac{\partial Q_1}{\partial z} \\
&= P_1\left(\frac{\partial Q_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial y}\right) + Q_1\left(\frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial z}\right) + R_1\left(\frac{\partial P_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial x}\right) \\
&+ P_2\left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z}\right) + Q_2\left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x}\right) + R_2\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}\right) \\
&= \left[-P_1\left(\frac{\partial R_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial z}\right) - Q_1\left(\frac{\partial P_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial x}\right) - R_1\left(\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y}\right)\right] \\
&+ \left[P_2\left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z}\right) + Q_2\left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x}\right) + R_2\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}\right)\right] \\
&= -\mathbf{F}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{G} + \mathbf{G}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F} \\
&= \mathbf{G}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{G}.
\end{aligned}$$

d) Do item (c) temos que

$$\operatorname{div}(\nabla f\times\nabla g) \;=\; \nabla g\cdot\operatorname{rot}(\nabla f) - \nabla f\cdot\operatorname{rot}(\nabla g).$$

Sabemos que, se f é uma função de três variáveis que tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então $\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Deste resultado, obtemos que

$$\operatorname{div}(\nabla f\times\nabla g) = \nabla g\cdot\mathbf{0} - \nabla f\cdot\mathbf{0} = 0.$$

3. ⧫ ([1], seção 16.6) ([3], seção 13.6) Determine a área da superfície.

a) A parte do paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

b) A parte de baixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ cortada pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solução:

a) Temos que $z = f(x, y) = y^2 - x^2$ com $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ Então,

$$A(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{1 + (2y)^2 + (-2x)^2}\, dA = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4y^2 + 4x^2}\, dA.$$

Usando coordenadas polares temos que

$$x = r\,\cos\theta, \quad y = r\,\operatorname{sen}\theta \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ e } 1 \leq r \leq 2.$$

Assim,

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \underbrace{\int_1^2 \sqrt{1 + 4r^2} r\, dr}_{\substack{u = 1 + 4r^2 \\ du = 8r\, dr}}$$

$$= \theta\Big|_0^{2\pi} \cdot \int_5^{17} u^{1/2} \cdot r \cdot \frac{du}{8r} = 2\pi \cdot \frac{1}{8} \int_5^{17} u^{1/2}\, du = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2}\Big|_5^{17}$$

$$= \frac{\pi}{6} \cdot (17^{3/2} - 5^{3/2}).$$

b) Sejam

$$\begin{cases} x = r\,\operatorname{sen}\phi\,\cos\theta \\ y = r\,\operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}\theta \\ z = r\,\cos\phi \end{cases} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}, \text{ na esfera.}$$

Temos que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 \quad \text{e} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z^2 + z^2 = 2 \Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z = 1\,(\text{pois } z \geq 0).$$

Logo, $\phi = \frac{\pi}{4}$. Para a parte inferior da esfera cortado pelo cone, temos que $\phi = \pi$. Então,

$$r(\phi, \theta) = (\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\phi,\,\cos\theta)\,\mathbf{i} + (\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{j} + (\sqrt{2}\,\cos\phi)\,\mathbf{k},$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \pi \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Isso implica que

$$r_\phi(\phi,\theta) = (\sqrt{2}\,\cos\phi,\,\cos\theta)\,\mathbf{i} + (\sqrt{2}\,\cos\phi\,\operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{j} - (\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\phi)\,\mathbf{k}$$

e

$$r_\theta(\phi,\theta) = (-\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\phi,\,\operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{i} + (\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\phi\,\cos\theta)\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
r_\phi \times r_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sqrt{2}\,\cos\phi\,\cos\theta & \sqrt{2}\,\cos\phi\,\operatorname{sen}\theta & -\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\phi \\ -\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}\theta & \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\phi\,\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&= (2\,\operatorname{sen}^2\phi\,\cos\theta)\,\mathbf{i} + (2\operatorname{sen}^2\phi\,\operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{j} + (2\,\operatorname{sen}\phi\,\cos\phi)\,\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Isso resulta que

$$\begin{aligned}
|r_\phi \times r_\theta| &= \sqrt{4\operatorname{sen}^2\phi\,\cos^2\theta + 4\,\operatorname{sen}^4\,\operatorname{sen}^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\phi\,\cos^2\phi} \\
&= \sqrt{4\,\operatorname{sen}^2\phi} = 2|\operatorname{sen}\phi| = 2\operatorname{sen}\phi \quad \left(\text{pois, } \frac{\pi}{4} \le \phi \le \pi\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$A = \iint\limits_D |r_\phi \times r_\theta|\,dA = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}\phi\,d\theta d\phi = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \operatorname{sen}\phi\,d\phi \cdot \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\cdot(-\cos\phi)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cdot \theta\Big|_0^{2\pi} = 2\cdot\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 2\pi = 4\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi(4 - 2\sqrt{2})$$

4. ♦ ([1], seção 16.6) ([2], seção 9.2) Determine uma equação do plano tangente *à* superfície parametrizada dada no ponto especificado.

   a) ★ $\mathbf{r}(u,v) = u^2\,\mathbf{i} + 2u\,\operatorname{sen}v\,\mathbf{j} + u\,\cos v\,\mathbf{k}$; $u = 1$, $v = 0$.

   b) $\mathbf{r}(u,v) = (u - v, u^2 + v^2, uv)$, no ponto $\mathbf{r}(1,1)$.

   Solução:

   a) Temos que $\mathbf{r}(u,v) = \underbrace{u^2}_{x(u,v)}\,\mathbf{i} + \underbrace{2u\,\operatorname{sen}v}_{y(u,v)}\,\mathbf{j} + \underbrace{u\,\cos v}_{z(u,v)}\,\mathbf{k}$ Primeiro, vamos calcular os vetores tangentes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_u &= \frac{\partial x(u,v)}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\,\mathbf{k} \\
&= 2u\,\mathbf{i} + 2\,\operatorname{sen}v\,\mathbf{j} + \cos v\,\mathbf{k}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_v &= \frac{\partial x(u,v)}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\,\mathbf{k} \\
&= 0\,\mathbf{i} + 2u\,\cos v\,\mathbf{j} - u\operatorname{sen}v\,\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Assim, o vetor normal ao plano tangente é:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 2\,\mathrm{sen}\, v & \cos v \\ 0 & 2u\cos v & -u\,\mathrm{sen}\, v \end{vmatrix} \\
&= (-2u\ \mathrm{sen}^2\, v - 2u\cos^2 v)\,\mathbf{i} + (2u^2\ \mathrm{sen}\, v)\,\mathbf{j} + (4u^2\ \cos v)\,\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Como $u = 1$ e $v = 0$ temos que o vetor normal é $-2\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$.
Portanto, uma equação do plano tangente no ponto $\mathbf{r}(1,0) = (1,0,1)$ é

$$-2 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-0) + 4 \cdot (z-1) = 0$$

$$-2x + 2 + 4z - 4 = 0$$

$$-2x + 4z - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2z + 1 = 0$$

b) Temos que $\mathbf{r}(u,v) = \underbrace{(u-v)}_{x(u,v)}\,\mathbf{i} + \underbrace{(u^2+v^2)}_{y(u,v)}\,\mathbf{j} + \underbrace{uv}_{z(u,v)}\,\mathbf{k}$ Primeiro, vamos calcular os vetores tangentes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_u &= \frac{\partial x(u,v)}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\,\mathbf{k} \\
&= \mathbf{i} + 2u\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_v &= \frac{\partial x(u,v)}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\,\mathbf{k} \\
&= -\,\mathbf{i} + 2v\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Assim, o vetor normal ao plano tangente é:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2u & v \\ -1 & 2v & u \end{vmatrix} \\
&= (-2u^2 - 2v^2)\,\mathbf{i} - (u+v)\,\mathbf{j} + (2u+2v)\,\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Como $u = 1$ e $v = 1$ temos que o vetor normal é $-4\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$.
Portanto, uma equação do plano tangente no ponto $\mathbf{r}(1,1) = (0,2,1)$ é

$$-4 \cdot (x-0) - 2 \cdot (y-2) + 4 \cdot (z-1) = 0$$

$$-4x - 2y + 4 + 4z - 4 = 0$$

$$-4x - 2y + 4z = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + y - 2z = 0$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. ♦ ([1], seção 16.5) Determine **(I)** o rotacional e **(II)** o divergente do campo vetorial.

   a) $\mathbf{F}(x,y,z) = xyz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{k}$

   b) $\mathbf{F}(x,y,z) = e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + e^x \cos y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

   c) $\mathbf{F}(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$

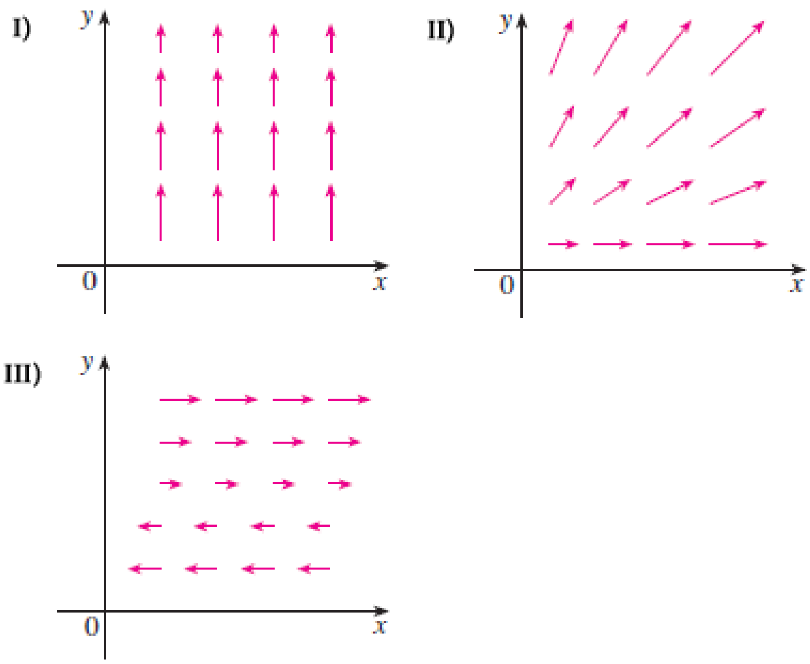
   d) $\mathbf{F}(x,y,z) = e^{xy} \operatorname{sen} z\,\mathbf{j} + y\,\operatorname{tg}^{-1}(x/z)\,\mathbf{k}$

   e) ★ $\mathbf{F}(x,y,z) = (\ln x, \ln(xy), \ln(xyz))$

6. ([1], seção 16.5) O campo vetorial $\mathbf{F}$ é mostrado no plano xy e é o mesmo em todos os planos horizontais (em outras palavras, $\mathbf{F}$ é independente de z e sua componente z é 0).

   a) O div $\mathbf{F}$ será positivo, negativo ou nulo? Justifique.

   b) Determine se o rot $\mathbf{F} = 0$. Se não, em que direção rot $\mathbf{F}$ aponta?



7. ([1], seção 16.5) Seja f um campo escalar e $\mathbf{F}$ um campo vetorial. Diga se cada expressão tem significado. Em caso negativo, explique por quê. Em caso afirmativo, diga se é um campo vetorial ou escalar.

a) $\operatorname{rot} f$
b) $\operatorname{grad} f$
c) $\operatorname{div} \mathbf{F}$
d) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)$
e) $\operatorname{grad} \mathbf{F}$
f) $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{F})$
g) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$
h) $\operatorname{grad}(\operatorname{div} f)$
i) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{F})$
j) $\operatorname{div}(\operatorname{div} \mathbf{F})$
k) $(\operatorname{grad} f) \times (\operatorname{div} \mathbf{F})$
l) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f))$

8. ⧫ ([1], seção 16.5) Determine se o campo vetorial é conservativo ou não. Se for conservativo, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

   a) $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2z^2\,\mathbf{k}$
   b) $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 + 2yz)\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}$
   c) $\mathbf{F}(x, y, z) = ye^{-x}\,\mathbf{i} + e^{-x}\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$
   d) ★ $\mathbf{F}(x, y, z) = y\cos xy\,\mathbf{i} + x\cos xy\,\mathbf{j} - \operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$

9. ([1], seção 16.5) Mostre que qualquer campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x)\,\mathbf{i} + g(y)\,\mathbf{j} + h(z)\,\mathbf{k},$$

   em que f, g e h são diferenciáveis, é irrotacional.

10. ([1], seção 16.5) Mostre que qualquer campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(y, z)\,\mathbf{i} + g(x, z)\,\mathbf{j} + h(x, y)\,\mathbf{k}$$

   é incompressível.

11. ([1], seção 16.5) Seja $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ e $r = |\mathbf{r}|$. Verifique as identidades

   a) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$
   b) $\nabla \cdot (r\mathbf{r}) = 4r$
   c) $\nabla^2 r^3 = 12r$
   d) $\nabla r = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$
   e) $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$
   f) $\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$
   g) $\nabla \ln r = \dfrac{\mathbf{r}}{r^2}$

12. ([4], seção 16.4) Mostre que $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ satisfaz a equação de Laplace $\nabla^2 f = 0$, exceto no ponto $(0, 0)$.

13. ([1], seção 16.5) Use o Teorema de Green na forma $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y)\, dA$ para demonstrar a **primeira identidade de Green**:

$$\iint_D f\nabla^2 g\, dA = \oint_C f(\nabla g) \cdot \mathbf{n}\, ds - \iint_D \nabla f \cdot \nabla g\, dA,$$

   em que D e C satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas. (A quantidade $\nabla g \cdot \mathbf{n} = D_{\mathbf{n}} g$ aparece na integral de linha. Essa é a derivada direcional na direção do vetor normal $\mathbf{n}$ e é chamada **derivada normal** de g.)

14. ([1], seção 16.5) Use a primeira identidade de Green (exercício anterior) para demonstrar a **segunda identidade de Green**:

$$\iint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dA = \oint_C (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\, ds,$$

em que D e C satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas.

15. ♦ ([1], seção 16.5) As equações de Maxwell relacionam o campo elétrico $\mathbf{E}$ e o campo magnético $\mathbf{H}$, quando eles variam com o tempo em uma região que não contenha carga nem corrente, como segue:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \qquad\qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad\qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

em que c é a velocidade da luz. Use essas equações para demonstrar o seguinte:

a) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$

b) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$

c) $\nabla^2 \mathbf{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$

d) $\nabla^2 \mathbf{H} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$

16. ♦ ([2], seção 8.4) Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$, sendo dados (para evitar repetição, ficará subentendido que $\mathbf{n}$ é unitário):

a) $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$, C dada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e $\mathbf{n}$ a normal exterior.

b) ★ $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{j}$, C a fronteira do quadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ e $\mathbf{n}$ a normal que aponta para fora do quadrado, sendo C orientada no sentido anti-horário.

c) $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i}$, C dada por $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e $\mathbf{n}$ a normal que aponta para fora da região $x^2/4 + y^2 \leq 1$.

d) $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i}$, C dada por $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$ e $\mathbf{n}$ a normal com componente $y \geq 0$.

e) $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$, C dada por $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$ e $\mathbf{n}$ a normal com componente $y < 0$.

17. ([2], seção 8.4) Prove que se $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ for constante sobre $Im\,\mathbf{r}$, então o fluxo de $\mathbf{F}$ sobre $\mathbf{r}$ é o produto de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ pelo comprimento de $\mathbf{r}$, em que $\mathbf{n}$ é normal a $\mathbf{r}$.

18. ([2], seção 8.4) Seja

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^5}\,\mathbf{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2)^5}\,\mathbf{j}$$

e $\mathbf{n}$ a normal unitária exterior ao círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$, em que C é dada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$. (Sugestão: Verifique que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ é constante.)

19. ([1], seção 16.6) Determine se os pontos P e Q estão na superfície dada.

    a) $\mathbf{r}(u, v) = (2u + 3v, 1 + 5u - v, 2 + u + v)$, $P(7, 10, 4)$ e $Q(5, 22, 5)$.

    b) $\mathbf{r}(u, v) = (u + v, u^2 - v, u + v^2)$, $P(3, -1, 5)$ e $Q(-1, 3, 4)$.

20. ♦ ([1], seção 16.6) Identifique a superfície que tem a equação paramétrica dada.

    a) $\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\,\mathbf{i} + (3 - v)\,\mathbf{j} + (1 + 4u + 5v)\,\mathbf{k}$.

    b) $\mathbf{r}(u, v) = 2\ \operatorname{sen} u\,\mathbf{i} + 3\ \cos u\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$, $0 \leq v \leq 2$.

21. ♦ ([1], seção 16.6) ([3], seção 13.6) Determine uma representação paramétrica para a superfície.

    a) O plano que passa pelo ponto $(1, 2, -3)$ e contém os vetores $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

    b) A parte do hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ que está *à* direita do plano xz.

    c) ★ A parte do paraboloide elíptico $x + y^2 + 2z^2 = 4$ que está em frente ao plano $x = 0$.

    d) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

    e) A parte do cilindro $y^2 + z^2 = 16$ que está entre os planos $x = 0$ e $x = 5$.

    f) A parte do plano $z = x + 3$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

    g) O paraboloide $z = x^2 + y^2$, $z \leq 4$.

    h) O paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

    i) A porção no primeiro octante do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}/2$ entre os planos $z = 0$ e $z = 3$.

    j) A porção da esfera $x^2+y^2+z^2 = 3$ entre os planos $z = \sqrt{3}/2$ e $z = -\sqrt{3}/2$.

    l) A superfície cortada do cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ pelos planos $x = 0$, $x = 2$ e $z = 0$.

    m) A porção do cilindro $(x - 2)^2 + z^2 = 4$ entre os planos $y = 0$ e $y = 3$.

22. ♦ ([2], seção 9.1) Desenhe a imagem da superfície parametrizada dada.

    a) $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

    b) $\mathbf{r}(u, v) = (1, u, v)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$.

    c) $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u + v \leq 1$.

d) $\mathbf{r}(u,v) = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v), \quad u^2+v^2 \leq 1.$

e) $\mathbf{r}(u,v) = (v\ \cos u, v\ \text{sen}\, u, v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq h$, onde $h > 0$ é um real dado.

f) $\mathbf{r}(u,v) = \left(v\ \cos u, v\ \text{sen}\, u, \dfrac{1}{v^2}\right), \quad 0 \leq u \leq 2\pi,\ v > 0.$

g) $\mathbf{r}(u,v) = (u, v, 1-u^2),\ u \geq 0,\ v \geq 0$ e $u+v \leq 1$.

23. ♦ ([1], seção 16.6) Faça uma correspondência entre as equações e os gráficos identificados por $I - VI$ e justifique sua resposta. Determine quais famílias de curvas da grade têm u constante e quais têm v constante.

a) $\mathbf{r}(u,v) = u\ \cos v\, \mathbf{i} + u\ \text{sen}\, v\, \mathbf{j} + v\, \mathbf{k}$.

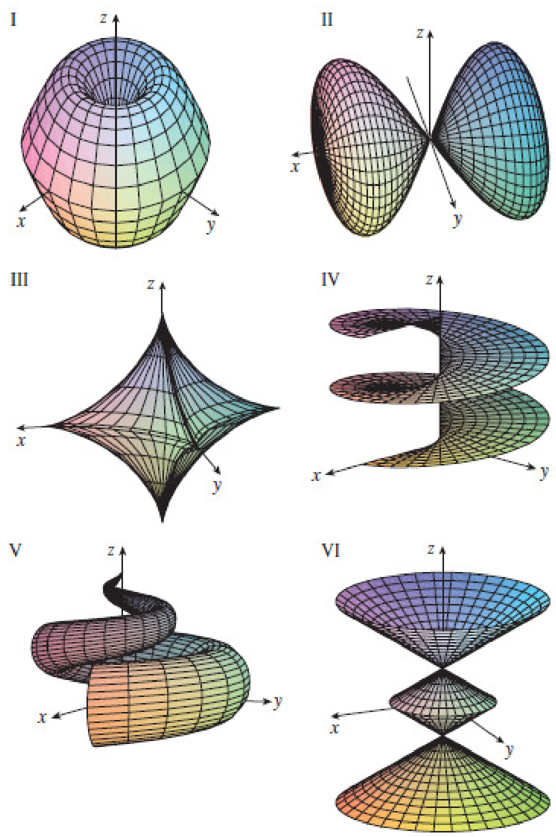
b) $\mathbf{r}(u,v) = u\ \cos v\, \mathbf{i} + u\ \text{sen}\, v\, \mathbf{j} + \text{sen}\, u\, \mathbf{k},\ -\pi \leq u \leq \pi$.

c) $\mathbf{r}(u,v) = \text{sen}\, v\, \mathbf{i} + \cos u\ \text{sen}\, 2v\, \mathbf{j} + \text{sen}\, u\ \text{sen}\, 2v\, \mathbf{k}$.

d) $x = (1-u)(3+\cos v)\ \cos 4\pi u,\ y = (1-u)(3+\cos v)\ \text{sen}\, 4\pi u,$
$z = 3u + (1-u)\ \text{sen}\, v$.

e) $x = \cos^3 u\ \cos^3 v,\ y = \text{sen}^3 u\ \cos^3 v,\ z = \text{sen}^3 v$.

f) $x = (1-|u|)\ \cos v,\ y = (1-|u|)\ \text{sen}\, v,\ z = u$.



24. ♦ ([1], seção 16.6) ([2], seção 9.2) ([3], seção 13.6) Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada dada no ponto especificado.

   a) $x = u + v$, $y = 3u^2$, $z = u - v$; $(2, 3, 0)$.

   b) $x = u^2$, $y = v^2$, $z = uv$; $u = 1$, $v = 1$.

   c) ★ $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, no ponto $\mathbf{r}(1, 1)$.

   d) $\mathbf{r}(u, v) = (\operatorname{arctg}(uv), e^{u^2-v^2}, u - v)$, no ponto $\mathbf{r}(1, -1)$.

   e) $\mathbf{r}(u, v) = (3 \operatorname{sen} 2u, 6 \operatorname{sen}^2 u, v), 0 \leq u \leq \pi$, no ponto $\mathbf{r}(\pi/3, 0)$.

25. (Prova, 2008)

   a) Determine uma representação paramétrica $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ do paraboloide elíptico $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.

   b) Calcule a equação do plano tangente à superfície paramétrica dada no item (a) no ponto $(-a\pi, 0, \pi^2)$.

26. ♦ ([2], seção 9.3) Calcule a área. (Sugerimos ao leitor desenhar a imagem da superfície dada.)

   a) $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u + v \leq 1$.

   b) $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, 2 - u - v)$ e $u^2 + v^2 \leq 1$.

   c) $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ e $u^2 + v^2 \leq 4$.

   d) $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, 4 - u^2 - v^2)$, $(u, v) \in K$, onde K é o conjunto no plano uv limitado pelo eixo u e pela curva (em coordenadas polares) $\rho = e^{-\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

   e) $\mathbf{r}(u, v) = \left(u, v, \dfrac{1}{2}u^2\right)$, $0 \leq v \leq u$ e $u \leq 2$.

   f) $\mathbf{r}(u, v) = (\cos u, v, \operatorname{sen} u)$ e $u^2 + 4v^2 \leq 1$.

27. ♦ ([1], seção 16.6) ([3], seção 13.6) Determine a área da superfície.

   a) A parte do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante.

   b) ★ A parte da superfície $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

   d) A parte da superfície $y = 4x + z^2$ que está entre os planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ e $z = 1$.

   e) A superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.

   f) A superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = uv$, $z = \dfrac{1}{2}v^2$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2$.

   g) A parte do plano $x + 2y + z = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

   h) A porção do cone $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 2$ e $z = 6$.

i) A porção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ entre os planos $z = 1$ e $z = 4$.

28. ([2], seção 9.3) Seja $A = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, z^2 + (y-2)^2 = 1\}$; ache a área da superfície gerada pela rotação em torno do eixo Oz do conjunto A.

29. ([1], seção 16.6)

    a) Determine, mas não calcule, a integral dupla da área da superfície com as equações paramétricas $x = au \cos v$, $y = bu \operatorname{sen} v$, $z = u^2$, $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

    b) Elimine os parâmetros para mostrar que a superfície é um paraboloide elíptico e escreva outra integral dupla que forneça sua área.

30. ([1], seção 16.6) Mostre que as equações paramétricas $x = a \cosh u \cos v$, $y = b \cosh u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{senh} u$, representam um hiperboloide de uma folha.

31. ([1], seção 16.6) Encontre a área da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ax$.

32. ([2], seção 9.3) Seja $f : K \to \mathbb{R}$ de classe C^1 no compacto K com fronteira de conteúdo nulo e interior não-vazio. Mostre que a área da superfície $z = f(x, y)$ (isto é, da superfície $\mathbf{r}$ dada por $x = u$, $y = v$ e $z = f(u, v)$) é dada pela fórmula
$$\iint_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy.$$

33. ([2], seção 9.3) Calcule a área da parte da superfície cilíndrica $z^2 + x^2 = 4$ que se encontra dentro do cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e acima do plano xy.

34. ([2], seção 9.3) Calcule a área da parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que se encontra dentro do cone $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

35. (Prova, 2008) Seja S a parte do cone $x^2 = y^2 + z^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ e no primeiro octante. Determine a área da superfície S.

36. (Prova, 2014) Encontre a área da superfície $z = 1 + 3x + 3y^2$ que está acima do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 1)$.

37. (Prova, 2007) Considere a superfície parametrizada por
$$\mathbf{r}(u, v) = (uv, u + v, u - v).$$

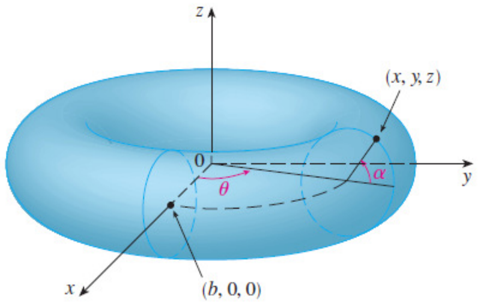
    a) Determine o valor de c de forma que o ponto $(c, 1, 0)$ pertença $\grave{a}$ superfície.

    b) Calcule a área da parte da superfície correspondente $\grave{a}$ variação $u^2 + v^2 \leq 1$.

38. ([1], seção 16.6)

a) Determine a representação paramétrica do toro obtido girando em torno do eixo z o círculo do plano xz com centro em $(b, 0, 0)$ e raio $a < b$. [Sugestão: tome como parâmetros os ângulos θ e α mostrados na figura.]

b) Use a representação paramétrica da parte (a) para achar a área do toro.



RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. **a)** (I) $-x^2\,\mathbf{i}+3xy\,\mathbf{j}-xz\,\mathbf{k}$. (II) yz.

   b) (I) $\mathbf{0}$. (II) 1.

   c) (I) $\mathbf{0}$. (II) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

   d) (I) $(\arctan(x/z)-e^{xy}\cos(z))\,\mathbf{i}-\dfrac{yz}{x^2+z^2}\,\mathbf{j}+ye^{xy}\,\mathrm{sen}(z)\,\mathbf{k}$.

   (II) $xe^{xy}\,\mathrm{sen}(z)-\dfrac{xy}{x^2+z^2}$.

   e) (I) $\dfrac{1}{y}\,\mathbf{i}-\dfrac{1}{x}\,\mathbf{j}+\dfrac{1}{x}\,\mathbf{k}$. (II) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$.

6. **I)** a) Negativo. b) $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}=\mathbf{0}$.

   II) a) Positivo. b) $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}=\mathbf{0}$.

   III) a) Nulo. b) $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ aponta na direção negativa do eixo z.

7. **a)** $\mathrm{rot}\,f$ não tem significado, pois f é um campo escalar.

   b) $\mathrm{grad}\,f$ é um campo gradiente.

   c) $\mathrm{div}\,\mathbf{F}$ é um campo escalar.

   d) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f)$ é um campo vetorial.

   e) $\mathrm{grad}\,\mathbf{F}$ não tem sifnificado, pois $\mathbf{F}$ não é um campo escalar.

   f) $\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{F})$ é um campo vetorial.

   g) $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,f)$ é um campo escalar.

   h) $\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,f)$ não tem significado, pois f é um campo escalar.

   i) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{F})$ é um campo vetorial.

   j) $\mathrm{div}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{F})$ não tem significado pois $\mathrm{div}\,\mathbf{F}$ é um campo escalar.

   k) $(\mathrm{grad}\,f)\times(\mathrm{div}\,\mathbf{F})$ não tem significado pois $\mathrm{div}\,\mathbf{F}$ é um campo escalar.

   l) $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f))$ é um campo escalar.

8. **a)** $f(x,y,z)=xy^2z^3$.

   b) $f(x,y,z)=x^2y+y^2z$.

   c) $\mathbf{F}$ não é conservativo.

   d) $f(x,y,z)=\mathrm{sen}(xy)+\cos(z)$.

9. Note que $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}=\mathbf{0}$.

10. Note que $\mathrm{div}\,\mathbf{F}=0$.

11. Dica: $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

    a) $\nabla\cdot\mathbf{r}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(x,y,z)$

b) $\nabla\cdot(r\mathbf{r}) = \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) + \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{y^2+y^2+z^2}} + \sqrt{y^2+y^2+z^2}\right)$
$+ \left(\dfrac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$

c) $\nabla^2 r^3 = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}(2x)\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}(2y)\right]$
$+ \dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}(2z)\right].$

d) $\nabla r = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right).$

e) $\nabla\times\mathbf{r} = \left[\dfrac{\partial}{\partial y}(z) - \dfrac{\partial}{\partial z}(y)\right]\mathbf{i} + \left[\dfrac{\partial}{\partial z}(x) - \dfrac{\partial}{\partial x}(z)\right]\mathbf{j} + \left[\dfrac{\partial}{\partial x}(y) - \dfrac{\partial}{\partial y}(x)\right]\mathbf{k}\,.$

f) $\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(2x)}{x^2+y^2+z^2}\,\mathbf{i} - \dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(2y)}{x^2+y^2+z^2}\,\mathbf{j} - \dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(2z)}{x^2+y^2+z^2}\,\mathbf{k}\,.$

g) $\nabla \ln r = \dfrac{1}{2}\nabla \ln(x^2+y^2+z^2).$

12. Note que se $(x,y)\neq(0,0)$, $\nabla^2 f = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{2x}{x^2+y^2}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{2y}{x^2+y^2}\right]$.

13. Note que $\oint_C f(\nabla g)\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint\limits_D \operatorname{div}(f\nabla g)\,dA = \iint\limits_D f\operatorname{div}(\nabla g) + \nabla f\cdot\nabla g\,dA.$

14. Note que pela primeira identidade de Green,

$$\iint\limits_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dA = \oint_C (f\nabla g\cdot\mathbf{n} - g\nabla f\cdot\mathbf{n})\,ds, + \iint\limits_D (\nabla f\cdot\nabla g - \nabla g\cdot\nabla f)\,dA.$$

15. **a)** $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = \nabla\times(\operatorname{rot}\mathbf{E}) = \nabla\times\left(-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right) = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{H} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)$

b) Análogo ao item (a).

c) Note que $\nabla^2\mathbf{E} = \nabla\operatorname{div}\mathbf{E} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{E})$.

d) Análogo ao item (c).

16. **a)** 2π.

b) 1.

c) 0.

d) 0.

e) $\dfrac{1}{3}$.

17. Direto da definição do fluxo de $\mathbf{F}$ através de $\mathbf{r}$ na direção $\mathbf{n}$.

18. π.

19. **a)** P não está na superfície; Q está na superfície.

 b) P está na superfície; Q não está na superfície.

20. **a)** $4x - y - z = -4$.

 b) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, com $0 \leq z \leq 2$.

21. **a)** $x = 1 + u + v$, $y = 2 + u - v$, $z = 3 - u + v$.

 b) $x = u$, $z = v$, $y = \sqrt{1 - u^2 + v^2}$.

 c) $y = u$, $z = v$, $x = 4 - u^2 - 2v^2$, onde $u^2 + 2v^2 \leq 4$.

 d) $x = 2\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta)$, $y = 2\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta)$, $z = 2\cos(\phi)$, onde $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

 e) $x = u$, $y = 4\cos(\theta)$, $z = 4\,\mathrm{sen}(\theta)$, onde $0 \leq u \leq 5$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

 f) $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, $z = 3 + r\cos(\theta)$, onde $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

 g) $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, $z = r^2$, onde $0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

 h) $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, $z = 9 - r^2$, onde $0 \leq r \leq 3$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

 i) $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, $z = \dfrac{r}{2}$, onde $0 \leq r \leq 6$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

 j) $x = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta)$, $y = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta)$, $z = \sqrt{3}\cos(\phi)$, onde $\dfrac{\pi}{3} \leq \phi \leq \dfrac{2\pi}{3}$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

 l) $x = u$, $y = v$, $z = 4 - v^2$, onde $0 \leq u \leq 2$ e $-2 \leq v \leq 2$.

 m) $x = 4\cos^2(v)$, $y = u$, $z = 4\cos(v)\,\mathrm{sen}(v)$, onde $-\dfrac{\pi}{2} \leq v \leq \dfrac{\pi}{2}$ e $0 \leq u \leq 3$.

22. **a)** Parabolóide de rotação $z = x^2 + y^2$.

 b) Região quadrada do plano $x = 1 : 0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$.

 c) Região triangular do plano $x + y + z = 1 : 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

 d) Semi superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$.

 e) Face lateral do cone $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h$.

 f) Gráfico de $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

 g) $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, 1 - u^2)$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u + v \leq 1$.

23. **a)** IV.

 b) I.

 c) II.

 d) V.

e) III.

24. **a)** $3x - y + 3z = 3$.

b) $x + y - 2z = 0$.

c) $(x, y, z) = (1, 1, 2) + s(1, 0, 2) + t(0, 1, 2),\ s, t \in \mathbb{R}$.

d) $(x, y, z) = \left(-\frac{\pi}{4}, 1, 2\right) + s\left(-\frac{1}{2}, 2, 1\right) + t\left(\frac{1}{2}, 2, -1\right),\ s, t \in \mathbb{R}$.

e) $x^2 + (y - 3)^2 = 9$.

25. **a)** $x = u,\ y = v,\ z = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}$, onde $u, v \in \mathbb{R}$.

b) $2\pi(x + a\pi) + a(z - \pi^2) = 0$.

26. **a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\pi\sqrt{3}$.

c) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)$.

d) $\frac{1}{72}\left(\ln\left(3\frac{\sqrt{e^{2\pi}+4}+e^{\pi}}{\sqrt{e^{2\pi}+4}-e^{\pi}}\right) + 3\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right) - 8e^{3\pi}\sqrt{e^{2\pi}+4}(e^{2\pi}+1) + 16\sqrt{5} - 6\pi\right)$.

e) $\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$.

f) $\frac{\pi}{2}$.

27. **a)** $3\sqrt{14}$.

b) $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

d) $\frac{\sqrt{21}}{2} + \frac{17}{4}\left(\ln(2 + \sqrt{21}) - \ln(\sqrt{17})\right)$.

e) $\frac{4}{15}(3^{5/2} - 2^{7/2} + 1)$.

f) 4.

g) $4\sqrt{6}\pi$.

h) $8\sqrt{5}\pi$.

i) 6π.

28. $8\pi^2$.

29. **a)** $\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{4b^2u^4\cos^2 v + 4a^2u^4 \operatorname{sen}^2 v + a^2b^2u^2}\ dudv$.

b) $\int_{-2a}^{2a}\int_{-b\sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 + \left(2\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(2\frac{y}{b^2}\right)^2}\ dydx$.

30. Note que $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

31. $2a^2(\pi-2)$.

32. Veja a subseção "Área de Superfície do Gráfico de uma função" da seção 16.6 do livro do Stewart.

33. 16.

34. $\pi(2-\sqrt{2})$.

35. $\dfrac{\pi a^2}{4}$

36. $\dfrac{1}{54}\left(46\sqrt{46}-10\sqrt{10}\right)$.

37. **a)** $\dfrac{1}{4}$.

    b) $\left(\sqrt{6}-\dfrac{4}{3}\right)2\pi$.

38. **a)** $x=b\cos(\theta)+a\cos(\alpha)\cos(\theta)$, $y=b\,\mathrm{sen}(\theta)+a\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\theta)$, $z=a\,\mathrm{sen}(\alpha)$, onde $0\leq\alpha\leq 2\pi$, $0\leq\theta\leq 2\pi$.

    b) $4\pi^2 ab$.

Referências

[1] J. Stewart. *Cálculo*, Volume 2, 6^a Edição, São Paulo, Pioneira/ Thomson Learning.

[2] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, Volume 3, 5^a Edição, 2002, Rio de Janeiro.

[3] G. B. Thomas. *Cálculo*, Volume 2, 10^a edição, São Paulo, Addison-Wesley/Pearson,2002.

[4] C. H. Edwards Jr; D. E. Penney. *Cálculo com Geometria Analítica*, Volumes 2 e 3, Prentice Hall do Brasil, 1997.

[5] E. W. Swokowski. *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 2, 2^a Edição, Markron Books, 1995.